L.D. Landau E.M. Lifschitz

Theoretische Physik kurzgefasst I

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

L. D. LANDAU · E. M. LIFSCHITZ

THEORETISCHE PHYSIK KURZGEFASST

BAND I

L. D. LANDAU† · E. M. LIFSCHITZ

THEORETISCHE PHYSIK KURZGEFASST

BAND I Mechanik
Elektrodynamik

L. D. LANDAU† · E. M. LIFSCHITZ

MECHANIK
ELEKTRODYNAMIK

In deutscher Sprache herausgegeben von

Dr. Jochen Monecke

Bergakademie Freiberg

Mit 35 Abbildungen

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN
1973

Л. Д. ЛАНДАУ и Е. М. ЛИФШИЦ
Краткий курс теоретической физики, книга I
МЕХАНИКА · ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Erschienen im Verlag Nauka, Moskau

Aus dem Russischen übersetzt von
Dipl.-Phys. HERBERT RZEHAK unter Verwendung von Teilen der Übersetzung des ersten und zweiten Bandes des Lehrbuches der Theoretischen Physik von L. D. LANDAU und E. M. LIFSCHITZ

Erschienen im Akademie-Verlag GmbH, 108 Berlin, Leipziger Straße 3—4
Lizenznummer: 202 · 100/444/72

Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer", 582 Bad Langensalza
Bestellnummer: 761 553 9 (5879/I) · ES 18 B 1
Printed in German Democratic Republic

Vorwort des Herausgebers zur deutschen Ausgabe

Mit dem vorliegenden Band beginnt die Herausgabe einer deutschen Übersetzung der dreibändigen Kurzfassung des „Lehrbuches der Theoretischen Physik" von L. D. Landau und E. M. Lifschitz. Aufgrund des hohen wissenschaftlichen Ansehens der beiden Autoren und der weltweiten Verbreitung ihres Lehrbuches bedarf die Herausgabe der Kurzfassung wohl keiner besondere Begründung. Ziel und potentieller Leserkreis sind im Vorwort zur ersten russischen Auflage umrissen. Gegenüber dieser Auflage wurden in die vorliegende deutsche Ausgabe auf Wunsch von Prof. E. M. Lifschitz zwei neue Paragraphen (§§ 76 und 77) aufgenommen und der Paragraph 38 um einen neuen Absatz ergänzt.

Freiberg, Dezember 1972

J. Monecke

Vorwort

Ungeachtet der Bemühungen der Autoren hinsichtlich einer strengen Stoffauswahl hat sich der Umfang der Bände unseres Lehrbuches der Theoretischen Physik bei jeder Neuauflage vergrößert. Dies ist eine natürliche und unvermeidbare Folge der schnellen Entwicklung der Wissenschaft. Gleichzeitig können aber infolgedessen diese Bücher immer weniger als Lehrbücher für Studenten und überhaupt für alle nicht auf dem Gebiet der theoretischen Physik arbeitenden Wissenschaftler benutzt werden.

In dieser Situation hat sich L. D. LANDAU in den letzten Jahren vor seinem folgenschweren Autounfall mit großer Begeisterung der Idee einer Kurzfassung des Lehrbuches der Theoretischen Physik angenommen. Seiner Meinung nach sollte diese Kurzfassung den minimalen Wissensstoff enthalten, der jedem modernen Physiker unabhängig von seiner speziellen Fachrichtung empfohlen werden kann. Der tragische Unfall hinderte L. D. LANDAU jedoch daran, an der Verwirklichung dieses Planes selbst teilzunehmen, so daß die Kurzfassung erst nach seinem Tod erscheint.
Es sind drei Bände geplant:

I. Mechanik — Elektrodynamik
II. Quantenmechanik
III. Makroskopische Physik.

Der vorliegende erste Band wurde im wesentlichen auf der Grundlage einer sorgfältigen Kürzung des Bandes I, Mechanik, und des Bandes II, Klassische Feldtheorie, zusammengestellt. Dabei versuchte ich alle Wünsche, die seinerzeit von L. D. LANDAU bei den ersten Erörterungen des Planes der Kurzfassung geäußert wurden, und seine an der Moskauer Universität gehaltenen Vorlesungen zu berücksichtigen. Insbesondere vertrat L. D. Landau die Meinung, daß die allgemeine Relativitätstheorie aus Band II nicht in eine solche Kurzfassung eingehen sollte. Seiner Meinung nach sollten die grundlegenden physikalischen Ideen dieser Theorie in Vorlesungen über allgemeine Physik dargestellt werden.

Der übrige Stoff der ersten zwei Bände unseres Lehrbuches ist hier ungefähr auf die Hälfte gekürzt worden. Da sich die Kurzfassung nicht das Ziel setzt, dem Physiker die theoretische Physik in ihrer ganzen Breite darzustellen, wurde nur eine kleine Anzahl einfacherer Übungsaufgaben zum besseren Verständnis aufgenommen.

Mai 1968

E. M. Lifschitz

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Mechanik

Bewegungsgleichungen I

§ 1. Verallgemeinerte Koordinaten

Einer der Grundbegriffe der Mechanik ist der Begriff des *Massenpunktes.*[1]) Unter dieser Bezeichnung versteht man einen Körper, dessen Ausmaße man bei der Beschreibung seiner Bewegung vernachlässigen kann. Natürlich hängt die Möglichkeit einer solchen Vernachlässigung von den konkreten Bedingungen der Aufgabe ab. So kann man z. B. die Planeten als Massenpunkte annehmen, wenn man ihre Bewegung um die Sonne untersucht, dagegen freilich nicht, wenn man ihre tägliche Drehung betrachtet. Die Lage eines Massenpunktes im Raume wird durch seinen Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ beschrieben, dessen Komponenten mit den kartesischen Koordinaten x, y, z zusammenfallen. Die Ableitung von $\boldsymbol{r}$ nach der Zeit t

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

heißt *Geschwindigkeit*, die zweite Ableitung $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ *Beschleunigung* des Punktes. Im folgenden werden wir oft die Differentiation nach der Zeit wie üblich durch einen Punkt über dem Buchstaben bezeichnen: $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$.

Zur Bestimmung der Lage eines Systems von N Massenpunkten im Raum müssen N Radiusvektoren gegeben sein, d. h. $3\,N$ Koordinaten. Allgemein versteht man unter der Zahl der *Freiheitsgrade* eines Systems die Anzahl der unabhängigen Größen, deren Angabe für die eindeutige Bestimmung der Lage des Systems notwendig ist; im vorliegenden Falle ist diese Zahl gleich $3\,N$. Diese Größen müssen nicht unbedingt kartesische Koordinaten sein; je nach den Bedingungen der Aufgabe kann die Wahl anderer Koordinaten vorteilhafter sein. Wenn die Gesamtheit irgendwelcher Größen $q_1, q_2, \ldots, q_s$ die Lage eines Systems (mit s Freiheitsgraden) völlig charakterisiert, so nennt man diese Größen *verallgemeinerte Koordinaten* und die Ableitungen $\dot{q}_i$ *verallgemeinerte Geschwindigkeiten.*

Die Angabe der verallgemeinerten Koordinaten bestimmt jedoch noch nicht den „mechanischen Zustand" eines Systems in einem gegebenen Zeitpunkt, d. h., sie gestattet noch nicht, die Lage des Systems in zukünftigen Zeitpunkten vorherzusagen. Bei gegebenen Koordinaten kann das System beliebige Geschwindigkeiten haben, und je nach Größe und Richtung von letzteren wird die

[1]) Statt „Massenpunkt" werden wir oft „Teilchen" sagen.

Lage des Systems im nächstfolgenden Zeitpunkt (d. h. nach einem unendlich kleinen Zeitintervall dt) verschieden sein.

Die gleichzeitige Angabe aller Koordinaten und Geschwindigkeiten bestimmt jedoch, wie die Erfahrung zeigt, den Zustand des Systems vollständig und erlaubt im Prinzip, die zukünftige Bewegung vorherzusagen. Das bedeutet vom mathematischen Standpunkt aus, daß durch die Angabe aller Koordinaten q und Geschwindigkeiten $\dot{q}$ zu irgendeinem Zeitpunkt auch die Größe der Beschleunigungen $\ddot{q}$ zu diesem Zeitpunkt eindeutig gegeben ist.[1])

Die Beziehungen, welche die Beschleunigungen mit den Koordinaten und Geschwindigkeiten verknüpfen, heißen *Bewegungsgleichungen.* Diese Gleichungen sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktion $q(t)$. Ihre Integration erlaubt im Prinzip, die Funktionen $q(t)$, d. h. die Bahngleichungen des mechanischen Systems, zu bestimmen.

§ 2. Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Die allgemeinste Formulierung des Bewegungsgesetzes mechanischer Systeme ist durch das sogenannte *Prinzip der kleinsten Wirkung* (oder HAMILTON*sches Prinzip*) gegeben. Nach diesem Prinzip ist jedes mechanische System durch eine bestimmte Funktion charakterisiert:

$$L\,(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s, t)$$

oder in abgekürzter Schreibweise $L(q, \dot{q}, t)$. Die Bewegung des Systems ergibt sich daraus folgendermaßen:

Angenommen, in den Zeitpunkten $t = t_1$ und $t = t_2$ nehme das System bestimmte Lagen ein, die durch zwei Koordinatenkonfigurationen $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ charakterisiert sind. Die Bewegung des Systems zwischen diesen beiden Lagen verläuft dann auf eine solche Weise, daß das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, \mathrm{d}t \qquad (2,1)$$

den kleinstmöglichen Wert annimmt. Die Funktion L heißt LAGRANGE-*Funktion* des gegebenen Systems, das Integral (2,1) heißt *Wirkung.*

Die Tatsache, daß die LAGRANGE-Funktion nur q und $\dot{q}$ enthält, jedoch keine höheren Ableitungen $\ddot{q}$, $\dddot{q}$, ..., ist der Ausdruck für den erwähnten Umstand, daß der mechanische Zustand vollkommen durch die Angabe der Koordinaten und Geschwindigkeiten bestimmt ist.

Wir gehen nun zur Ableitung der Differentialgleichungen über, welche die Aufgabe, das Minimum des Integrals (2,1) zu finden, lösen. Zur Vereinfachung der Formeln nehmen wir zunächst an, daß das System nur *einen* Freiheitsgrad besitzt und daher nur *eine* Funktion $q(t)$ bestimmt werden soll.

[1]) Der Kürze halber werden wir in Zukunft oft unter q die Gesamtheit aller Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_s$ verstehen (und unter $\dot{q}$ analog die Gesamtheit aller Geschwindigkeiten).

Angenommen, $q = q(t)$ sei eben diese Funktion, die S zu einem Minimum macht. Das bedeutet: S wächst, wenn $q(t)$ durch eine beliebige Funktion der Form

$$q(t) = \delta q(t) \tag{2,2}$$

ersetzt wird: $\delta q(t)$ ist eine Funktion, die in dem ganzen Zeitintervall von t_1 bis t_2 klein ist (sie heißt *Variation* der Funktion $q(t)$); da für $t = t_1$ und $t = t_2$ alle zu vergleichenden Funktionen (2,2) dieselben Werte $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ annehmen sollen, so muß

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \tag{2,3}$$

sein.

Die Änderung von S beim Ersetzen von q durch $q + \delta q$ ist durch die Differenz

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,\mathrm{d}t$$

gegeben.

Die Entwicklung dieser Differenz nach Potenzen von δq und $\delta\dot{q}$ (im Integranden) beginnt mit Gliedern erster Ordnung. Die notwendige Bedingung dafür, daß S ein Minimum wird, ist das Verschwinden der Gesamtheit dieser Glieder; diese Gesamtheit heißt erste Variation (oder gewöhnlich einfach Variation) des Integrals. Auf diese Weise kann das Prinzip der kleinsten Wirkung in folgender Form geschrieben werden:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{2,4}$$

oder, nach Ausführung der Variation

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}\right) \mathrm{d}t = 0\,.$$

Wenn man berücksichtigt, daß $\delta\dot{q} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\delta q$ ist, und das zweite Glied partiell integriert, erhält man

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q\,\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\,\mathrm{d}t = 0\,. \tag{2,5}$$

Auf Grund der Bedingung (2,3) verschwindet jedoch das erste Glied in diesem Ausdruck. Das Integral, das übrig bleibt, soll für beliebige Werte von δq gleich Null sein. Das ist aber nur möglich, wenn der Integrand verschwindet. Auf diese Weise erhalten wir die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\,.$$

Im Falle von s (> 1) Freiheitsgraden müssen s verschiedene Funktionen $q_i(t)$ unabhängig voneinander variiert werden. Offenbar erhalten wir dann s Gleichungen der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)\,. \tag{2,6}$$

Das sind die gesuchten Differentialgleichungen. Sie heißen in der Mechanik LAGRANGE*sche Gleichungen.*[1])

Wenn die LAGRANGE-Funktion eines gegebenen mechanischen Systems bekannt ist, so verknüpfen die Gleichungen (2,6) die Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und Koordinaten miteinander, d. h., sie stellen die Bewegungsgleichungen des Systems dar.

In mathematischer Hinsicht bilden die Gleichungen (2,6) ein System von s gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für s unbekannte Funktionen $q_i(t)$. Die allgemeine Lösung eines solchen Systems enthält $2\,s$ freie Konstanten. Zu ihrer Festlegung und damit zur vollständigen Bestimmung der Bewegung des mechanischen Systems ist die Kenntnis der Anfangsbedingungen notwendig, die den Zustand des Systems in irgendeinem gegebenen Zeitpunkt charakterisieren, d. h. die Kenntnis der Anfangswerte aller Koordinaten und Geschwindigkeiten.

Angenommen ein mechanisches System bestehe aus zwei Teilen A und B. Die LAGRANGE-Funktionen der als abgeschlossen betrachteten Teilsysteme seien L_A und L_B. Im Grenzfall, wo die beiden Teile sich in so großer Entfernung voneinander befinden, daß man die Wechselwirkung zwischen ihnen vernachlässigen kann, strebt die LAGRANGE-Funktion des Gesamtsystems dem Grenzwert

$$\lim L = L_A + L_B \tag{2,7}$$

zu. Die LAGRANGE-Funktionen addieren sich also. Diese Eigenschaft bedeutet, daß die Bewegungsgleichungen jedes der beiden nicht miteinander in Wechselwirkung stehenden Teile keine Größen enthalten können, die sich auf den anderen Teil des Systems beziehen.

Offenbar wirkt sich die Multiplikation der LAGRANGE-Funktion eines mechanischen Systems mit einem beliebigen konstanten Faktor an sich nicht auf die Bewegungsgleichungen aus. Scheinbar folgt hieraus eine wesentliche Unbestimmtheit: Die LAGRANGE-Funktionen verschiedener isolierter mechanischer Systeme müßten mit beliebigen voneinander verschiedenen Konstanten multipliziert werden können. Die additive Eigenschaft (2,7) beseitigt diese Unbestimmtheit. Sie erlaubt lediglich, daß die LAGRANGE-Funktionen aller Systeme mit der gleichen Konstanten multipliziert werden. Das bedeutet aber weiter nichts, als daß man die Maßeinheit dieser physikalischen Größe willkürlich wählen kann. Wir kehren zu dieser Frage noch einmal in § 4 zurück.

Wir müssen noch folgende allgemeine Bemerkungen machen. Wir betrachten zwei Funktionen $L'(q, \dot{q}, t)$ und $L(q, \dot{q}, t)$, die sich voneinander durch die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion $f(q, t)$ der Koordinaten und der Zeit unterscheiden:

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q, t)\,. \tag{2,8}$$

[1]) In der Variationsrechnung heißen sie die EULERschen Gleichungen. Die Variationsrechnung untersucht die Aufgabe, die Extremalwerte von Integralen der Form (2,1) zu finden.

Die mit Hilfe dieser beiden Funktionen berechneten Integrale (2,1) sind durch die Beziehung verknüpft

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L'(q, \dot{q}, t)\, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t$$

$$= S + f(q^{(2)}, t_2) - f(q^{(1)}, t_1)\,,$$

d. h., sie unterscheiden sich voneinander durch ein Zusatzglied, das bei der Variation der Wirkung verschwindet, so daß die Bedingung $\delta S' = 0$ mit der Bedingung $\delta S = 0$ zusammenfällt und die Form der Bewegungsgleichungen unverändert bleibt. Auf diese Weise ist die LAGRANGE-Funktion bis auf ein Zusatzglied bestimmt, das die totale zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion der Koordinaten und der Zeit ist.

§ 3. Das GALILEIsche Relativitätsprinzip

Zur Beschreibung der in der Natur vorkommenden Prozesse ist es notwendig, irgendein *Bezugssystem* zu verwenden. Unter einem Bezugssystem versteht man ein System von Koordinaten, das zur Lagebestimmung der Teilchen im Raum dient und einer zu diesem System gehörenden Menge von Uhren zur Anzeige der Zeit.

In den verschiedenen Bezugssystemen haben die Naturgesetze — darunter die Bewegungsgesetze — im allgemeinen ein unterschiedliches Aussehen. Wählt man ein beliebiges Koordinatensystem, so können in ihm sogar Gesetze von ganz einfacher Gestalt kompliziert aussehen. Naturgemäß erhebt sich die Frage, ob sich ein Bezugssystem finden läßt, in dem die Naturgesetze die einfachste Form annehmen.

Die einfachste Bewegungsform ist die Bewegung eines freien Körpers, d. h. eines Körpers, der keinerlei äußeren Einflüssen unterworfen ist. Es gibt Bezugssysteme, in denen die *freie Bewegung* mit einer Geschwindigkeit konstanter Größen und konstanter Richtung verläuft. Solche Bezugssysteme heißen *Inertialsysteme*, und die Behauptung ihrer Existenz ist der Inhalt des *Trägheitsgesetzes.*

Die Eigenschaft ein Inertialsystem zu sein ist gleichbedeutend mit der Behauptung der Homogenität und Isotropie des Raumes und der Homogenität der Zeit hinsichtlich dieses Bezugssystems. Homogenität von Raum und Zeit bedeutet die Äquivalenz aller Lagen freier Teilchen im Raum zu jedem Zeitpunkt und die Isotropie des Raumes — die Äquivalenz verschiedener Richtungen in ihm. Die Unveränderlichkeit des Charakters der freien Bewegung von Teilchen in beliebiger Richtung des Raumes ist offensichtlich eine Folge dieser Eigenschaften.

Bewegen sich zwei Bezugssysteme relativ zueinander gleichmäßig und geradlinig und ist eines von ihnen ein Inertialsystem, so ist offensichtlich auch das zweite ein Inertialsystem: jede freie Bewegung in diesem System wird mit gleichbleibender Geschwindigkeit ablaufen. Auf diese Weise gibt es beliebig viele Inertialsysteme, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

Es zeigt sich jedoch, daß die verschiedenen Inertialsysteme nicht nur bezüglich der Eigenschaften der freien Bewegung äquivalent sind. Die Erfahrung bestätigt die Richtigkeit des sogenannten *Relativitätsprinzips*. Entsprechend diesem Prinzip sind alle Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleich. Mit anderen Worten, Gleichungen, die Naturgesetze ausdrücken, sind bezüglich der Transformationen von Raum- und Zeitkoordinaten von einem Inertialsystem zu einem anderen invariant. Das heißt, daß Gleichungen von Naturgesetzen, die durch Raum- und Zeitkoordinaten in verschiedenen Inertialsystemen ausgedrückt werden, ein und dieselbe Form haben.

Mit dem Relativitätsprinzip, der Hauptgrundlage für die Darstellung der *klassischen* (oder NEWTON*schen*) Mechanik[1]), ist die Annahme einer *absoluten Zeit* — der Gleichheit des Zeitablaufs in allen Inertialsystemen verbunden. Zusammen mit dieser Annahme wird das Relativitätsprinzip als GALILEI*sches Relativitätsprinzip* bezeichnet.

Die Koordinaten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ ein und desselben Punktes in zwei verschiedenen Bezugssystemen K und K', von denen sich das zweite gegen das erste mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ bewegt, sind miteinander durch die Beziehung

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V} t \tag{3,1}$$

verknüpft, wobei die Zeit t in beiden Systemen die gleiche ist:

$$t = t' . \tag{3,2}$$

Wenn wir beide Seiten der Gleichung (3,1) nach der Zeit differenzieren, erhalten wir das übliche *Gesetz der Addition der Geschwindigkeiten*

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V} . \tag{3,3}$$

Die Formeln (3,1) und (3,2) heißen GALILEI-*Transformation*. Das GALILEIsche Relativitätsprinzip verlangt die Invarianz der Naturgesetze hinsichtlich dieser Transformation.

Das Gesagte zeigt hinreichend klar die Bedeutung der Inertialsysteme. Aus diesem Grunde werden sie in der Regel bei Untersuchungen der mechanischen Erscheinungen verwendet. Im folgenden werden wir stets Inertialsysteme betrachten, wenn nichts Gegenteiliges gesagt ist. Die völlige physikalische Äquivalenz aller Inertialsysteme zeigt andererseits, daß kein „absolutes“ Bezugssystem existiert, das man allen anderen vorziehen könnte.

[1]) Im Unterschied zur *relativistischen* (oder EINSTEIN*schen*) Mechanik, von der in den Kap. VIII, IX die Rede sein wird.

§ 4. Die LAGRANGE-Funktion des freien Massenpunktes

Wir wollen nun die Form der LAGRANGE-Funktion bestimmen und betrachten zunächst den einfachsten Fall, die freie Bewegung eines Massenpunktes in einem Inertialsystem.

Auf Grund der Homogenität von Raum und Zeit kann die LAGRANGE-Funktion des freien Teilchens offensichtlich weder vom Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ des Teilchens, noch von der Zeit t abhängen, d. h., L erweist sich lediglich als Funktion der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$. Infolge der Isotropie des Raumes kann die LAGRANGE-Funktion auch nicht von der Richtung von $\boldsymbol{v}$ abhängen, so daß sie lediglich eine Funktion seines absoluten Betrages, d. h. des Quadrates $\boldsymbol{v}^2 = v^2$ ist:

$$L = L(v^2)\,.$$

Um die genaue Form dieser Abhängigkeit zu finden, benutzen wir das GALILEIsche Relativitätsprinzip. Auf Grund dieses Prinzips muß die Funktion $L(v^2)$ in allen Inertialsystemen die gleiche Form haben. Andererseits wird die Geschwindigkeit der Teilchen beim Übergang von einem Bezugssystem zu einem anderen entsprechend (3,3) so transformiert, daß $L(v^2)$ in $L\,[(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V})^2]$ übergeht. Daraus folgt zwangsläufig, daß sich der letzte Ausdruck von $L(v'^2)$ höchstens um die totale Ableitung einer Funktion der Koordinaten und der Zeit unterscheiden kann; wie am Ende von § 2 gezeigt wurde, kann eine solche Ableitung stets fortgelassen werden.

Dieser Forderung entspricht nur eine Abhängigkeit der Form

$$L = a\,v^2\,.$$

Mit der Transformation $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$ erhalten wir:

$$L(v^2) = a\,v^2 = a\,(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V})^2 = a\,v'^2 + 2\,a\,\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{V} + a\,V^2\,,$$

oder, unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{v}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t$:

$$L(v^2) = L(v'^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(2\,a\,\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{V} + V^2\,t)\,.$$

Das zweite Glied ist eine totale Ableitung und kann fortgelassen werden.

Die Konstante a wird üblicherweise mit $m/2$ bezeichnet, so daß wir die LAGRANGE-Funktion des sich frei bewegenden Punktes in der endgültigen Form

$$L = \frac{m\,v^2}{2} \tag{4,1}$$

schreiben. Die Größe m heißt Masse. Infolge der Additivität der LAGRANGE-Funktion haben wir für ein System von nicht miteinander in Wechselwirkung stehenden Teilchen[1])

$$L = \sum_a \frac{m_a\,v_a^2}{2}\,. \tag{4,2}$$

[1]) Als Index, der die Nummer des Teilchens angibt, werden wir die ersten Buchstaben des lateinischen Alphabetes verwenden, als Indizes, welche die Koordinaten numerieren, benutzen wir die Buchstaben $i, k, l, \ldots$.

Es muß betont werden, daß erst bei Berücksichtigung dieser Eigenschaft der Additivität die Definition der Masse einen realen Sinn erhält.

Wie schon in § 2 erwähnt wurde, kann man die LAGRANGE-Funktion stets mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren; das wirkt sich auf die Bewegungsgleichungen nicht aus. Für die Funktion (4,2) bedeutet ein solcher Faktor eine Änderung der Maßeinheit der Masse; die Massenverhältnisse verschiedener Teilchen — nur sie haben einen realen physikalischen Sinn — bleiben bei dieser Transformation unverändert.

Es ist leicht zu sehen, daß die Masse nicht negativ sein kann. Gemäß dem Prinzip der kleinsten Wirkung für eine reelle Bewegung eines Massenpunktes vom Punkte 1 zum Punkte 2 hat das Integral

$$S = \int_1^2 \frac{m v^2}{2} \mathrm{d}t$$

tatsächlich ein Minimum. Wenn die Masse negativ wäre, so würde das Wirkungsintegral für eine Bahn, auf der das Teilchen sich zunächst schnell von 1 entfernt und sich sodann schnell 2 nähert, einen beliebig großen negativen Wert annehmen, d. h., es würde kein Minimum existieren.

Es ist nützlich zu bemerken, daß

$$v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}l^2}{\mathrm{d}t^2} \tag{4,3}$$

gilt. Darum genügt es zur Aufstellung der LAGRANGE-Funktion, das Quadrat der Länge eines Bogenelementes $\mathrm{d}l$ in dem entsprechenden Koordinatensystem zu finden.

In kartesischen Koordinaten ist z.B. $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ und damit

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \tag{4,4}$$

In Zylinderkoordinaten ist $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$, so daß

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) \tag{4,5}$$

wird. In sphärischen Koordinaten ist $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\Theta^2 + r^2 \sin^2\Theta\,\mathrm{d}\varphi^2$ und

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\Theta}^2 + r^2 \sin^2\Theta\,\dot{\varphi}^2)\,. \tag{4,6}$$

§ 5. Die LAGRANGE-Funktion eines Systems von Teilchen

Wir betrachten jetzt ein System von Teilchen, die zwar untereinander, aber nicht mit irgendwelchen anderen Körpern in Wechselwirkung stehen, solch ein System heißt *abgeschlossen*. Es zeigt sich, daß die Wechselwirkung zwischen Teilchen dadurch beschrieben werden kann, daß man zur LAGRANGE-Funktion

(4,2) für nicht miteinander wechselwirkende Teilchen eine bestimmte Koordinatenfunktion hinzufügt, die vom Charakter der Wechselwirkung abhängt.[1]) Wenn wir diese Funktion mit $-U$ bezeichnen, so können wir schreiben

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots) \tag{5,1}$$

($\boldsymbol{r}_a$ ist der Radiusvektor des a-ten Punktes). Dies ist die allgemeine Form der LAGRANGE-Funktion eines abgeschlossenen Systems.

Die Summe

$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$$

heißt die *kinetische Energie*, die Funktion U die *potentielle Energie* des Systems; der Sinn dieser Bezeichnungen wird in § 6 deutlich. Die Tatsache, daß die potentielle Energie nur von der Lage aller Massenpunkte in ein und demselben Zeitpunkt abhängt, bedeutet, daß eine Änderung der Lage eines von ihnen sich sofort auf alle übrigen auswirkt; man kann sagen, daß die Wechselwirkung sich augenblicklich „ausbreitet". Diese Eigenschaft der Wechselwirkung in der klassischen Mechanik steht in engem Zusammenhang mit der Grundvoraussetzung, daß die Zeit absolut ist und das GALILEIsche Relativitätsprinzip gilt. Wenn die Wechselwirkung sich nicht augenblicklich, sondern mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, so würde diese Geschwindigkeit in verschiedenen Systemen (die sich relativ zueinander bewegen) verschieden sein, da die Annahme einer absoluten Zeit automatisch bedeutet, daß die gewöhnliche Regel der Vektoraddition auf alle Erscheinungen anwendbar ist. Dann wären aber die Bewegungsgesetze miteinander in Wechselwirkung stehender Körper verschieden in verschiedenen Inertialsystemen, was dem Relativitätsprinzip widerspräche.

In § 3 sprachen wir nur von der Homogenität der Zeit. Die Form der LAGRANGE-Funktion (5,1) zeigt nun, daß die Zeit nicht nur homogen, sondern auch isotrop ist, d. h., ihre Eigenschaften sind in beiden Richtungen die gleichen. Tatsächlich läßt der Übergang von t zu $-t$ (*Zeitumkehr*) die LAGRANGE-Funktion und infolgedessen auch die Bewegungsgleichungen unverändert. Mit anderen Worten, wenn in einem System irgendeine Bewegung möglich ist, so ist stets auch die entgegengesetzte Bewegung möglich, d. h. eine solche, bei der das System dieselben Zustände in umgekehrter Reihenfolge durchläuft. In diesem Sinne sind alle Bewegungen, die nach den Gesetzen der klassischen Mechanik verlaufen, reversibel.

Wenn wir die LAGRANGE-Funktion kennen, so können wir die Bewegungsgleichungen[2]) aufschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5,2}$$

[1]) Diese Aussage gilt nur für die klassische Mechanik.

[2]) Unter der Ableitung einer skalaren Größe nach einem Vektor versteht man einen Vektor, dessen Komponenten sich aus der Ableitung dieser Größe nach den entsprechenden Komponenten des Vektors ergeben.

Einsetzen von (5,1) ergibt

$$m_a \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}. \tag{5,3}$$

In dieser Form heißen die Bewegungsgleichungen NEWTON*sche Gleichungen* und bilden die Grundlage der Mechanik von Teilchensystemen. Der Vektor

$$\boldsymbol{F}_a = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}, \tag{5,4}$$

der auf der rechten Seite der Gleichung (5,3) steht, heißt die *Kraft*, die auf das a-te Teilchen wirkt. Sie hängt ebenso wie U nur von den Koordinaten aller Teilchen ab, aber nicht von ihren Geschwindigkeiten. Die Gleichung (5,2) zeigt also, daß die Beschleunigungsvektoren der Teilchen Funktionen der Koordinaten allein sind.

Die potentielle Energie ist nur bis auf eine beliebige additive Konstante definiert; durch Hinzufügen einer Konstante würden sich die Bewegungsgleichungen nicht ändern (das ist ein spezieller Fall der am Ende von § 2 erwähnten Mehrdeutigkeit der LAGRANGE-Funktion). Die natürlichste und übliche Wahl dieser Konstanten besteht darin, daß man das Verschwinden der potentiellen Energie bei unendlich großen Abständen zwischen den Teilchen fordert.

Wenn man für die Beschreibung der Bewegung nicht kartesische, sondern beliebige verallgemeinerte Koordinaten q_i benutzt, so muß man, um die LAGRANGE-Funktion zu erhalten, die entsprechenden Transformationen durchführen:

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \ldots, q_s), \qquad \dot{x}_a = \sum_k \frac{\partial f_a}{\partial q_k} \dot{q}_k .$$

Wenn wir diese Ausdrücke in die Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

einsetzen, so erhalten wir die gesuchte LAGRANGE-Funktion in der Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q), \tag{5,5}$$

wo die a_{ik} nur von den Koordinaten abhängen. Die kinetische Energie ist auch in verallgemeinerten Koordinaten eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten, kann aber außerdem noch von den Koordinaten abhängen.

Bisher haben wir nur von abgeschlossenen Systemen gesprochen. Jetzt wollen wir ein nichtabgeschlossenes System A betrachten, das mit einem anderen System B in Wechselwirkung steht, das eine gegebene Bewegung ausführt. In diesem Fall sagt man, daß das System A sich in einem gegebenen Feld bewegt (das durch das System B erzeugt wird). Da wir die Bewegungsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung durch unabhängige Variation jeder einzelnen Koordinate erhalten (d. h., man tut so, als ob die übrigen bekannt

wären), so können wir zum Auffinden der LAGRANGE-Funktion L_A des Systems A die LAGRANGE-Funktion L des Gesamtsystems $A + B$ benutzen und in ihr die Koordinaten q_B durch die gegebenen Funktionen der Zeit ersetzen.

Unter der Voraussetzung, daß das System $A + B$ abgeschlossen ist, erhalten wir

$$L = T_A(q_A, \dot{q}_A) + T_B(q_B, \dot{q}_B) - U(q_A, q_B) ,$$

wo die ersten beiden Glieder die kinetischen Energien der Systeme A und B, das dritte Glied die gesamte potentielle Energie bedeuten. Indem man für die q_B die gegebenen Zeitfunktionen einsetzt und das Glied $T_B(q_B(t), \dot{q}_B(t))$ fortläßt, das nur von der Zeit abhängt (und darum die totale Ableitung irgendeiner Funktion der Zeit ist), erhält man

$$L_A = T_A(q_A, \dot{q}_A) - U(q_A, q_B(t)) .$$

Auf diese Weise wird die Bewegung eines Systems im äußeren Feld durch eine LAGRANGE-Funktion des gewöhnlichen Typs beschrieben, nur mit dem Unterschied, daß jetzt die potentielle Energie explizit von der Zeit abhängen kann.

Die allgemeine Form der LAGRANGE-Funktion eines Teilchens, das sich in einem äußeren Feld bewegt, ist also

$$L = \frac{m v^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t) , \tag{5,6}$$

und die Bewegungsgleichungen lauten

$$m \dot{\boldsymbol{v}} = - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} . \tag{5,7}$$

Ein Feld heißt *homogen*, wenn in allen Punkten dieselbe Kraft $\boldsymbol{F}$ auf das Teilchen wirkt. Die potentielle Energie in einem solchen Feld ist offenbar

$$U = - \boldsymbol{F} \boldsymbol{r} . \tag{5,8}$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen bemerken wir noch folgendes über die Anwendung der LAGRANGE-Funktion auf verschiedene konkrete Aufgaben. Man hat es oft mit mechanischen Systemen zu tun, in denen die Wechselwirkungen zwischen den Körpern (Massenpunkten) sogenannten *Bindungscharakter* haben, d. h., sie schränken die relative Lage der Körper ein. Solche Bindungen werden durch Verkopplung der Körper mittels Stäben, Fäden, Scharnieren usw. verwirklicht. Dadurch entsteht insofern eine neue Sachlage, als die Bewegung der Körper mit Reibung in den Berührungspunkten verbunden ist, so daß die Aufgabe an sich über den Rahmen der reinen Mechanik hinausgeht (s. § 20). Jedoch ist in vielen Fällen die Reibung des Systems so gering, daß ihr Einfluß auf die Bewegung vernachlässigbar ist. Wenn man darüber hinaus die Massen der „Verbindungselemente" vernachlässigen kann, so bedeuten letztere einfach ein Verringerung der Anzahl s der Freiheitsgrade des Systems (im Vergleich zu der Anzahl $3N$). Zur Bestimmung der Bewegung des Systems kann man

wiederum die LAGRANGE-Funktion in der Form (5,5) benutzen, wobei die Anzahl der unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten der tatsächlichen Anzahl der Freiheitsgrade entspricht.

Aufgaben

Finde die LAGRANGE-Funktion folgender Systeme, die sich im homogenen Schwerefeld befinden (Schwerebeschleunigung sei g).

1. Ebenes Doppelpendel (Abb. 1).

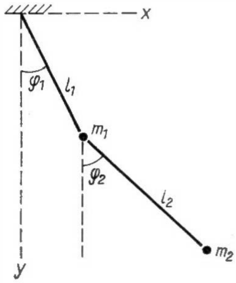


Abb. 1

Lösung: Als Koordinaten wählen wir die Winkel φ_1 und φ_2, welche die Fäden l_1 und l_2 mit der Vertikalen einschließen: dann ergibt sich für den Punkt m_1

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \qquad U_1 = -m_1 g l_1 \cos \varphi_1 .$$

$U_2 = -m_2 g l_2 \cos \varphi_2$

Um die kinetische Energie des zweiten Punktes zu finden, drücken wir seine kartesischen Koordinaten x_2, y_2 (der Koordinaten-Nullpunkt liegt im Aufhängepunkt, die y-Achse zeigt in vertikaler Richtung nach unten) durch die Winkel φ_1, φ_2 aus:

$$x_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 , \qquad y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 .$$

Danach erhalten wir

$$T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} [l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2]$$

Addition theorem.

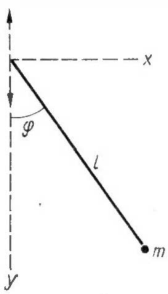


Abb. 2

und schließlich

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2 .$$

2. Ebenes Pendel, dessen Aufhängepunkt vertikale Schwingungen nach dem Gesetz $a \cos \gamma t$ ausführt (Abb. 2).

Lösung: Die Koordinaten des Punktes m sind

$$x = l \sin \varphi , \qquad y = l \cos \varphi + a \cos \gamma t .$$

Die LAGRANGE-Funktion lautet:

$$L = \frac{m l^2}{2} \dot{\varphi}^2 + m a l \gamma^2 \cos \gamma t \cos \varphi + m g l \cos \varphi ;$$

hier sind die Glieder, die nur von der Zeit abhängen, sowie die totale zeitliche Ableitung von $m a l \gamma \cos \varphi \sin \gamma t$ weggelassen.

II Erhaltungssätze

§ 6. Energie

Bei der Bewegung eines mechanischen Systems ändern sich die $2s$ Größen q_i und $\dot{q}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, die den Zustand des Systems bestimmen, mit der Zeit. Es existieren jedoch gewisse Funktionen dieser Größen, die bei der Bewegung ihren Wert erhalten und nur von den Anfangsbedingungen abhängen. Diese Funktionen heißen *Bewegungsintegrale*.

Die Anzahl der unabhängigen Bewegungsintegrale für ein abgeschlossenes mechanisches System mit s Freiheitsgraden ist $2s - 1$. Dies kann man durch folgende einfache Überlegungen zeigen. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen enthält $2s$ freie Konstanten (s. S. 6). Da die Bewegungsgleichungen eines abgeschlossenen Systems die Zeit nicht explizit enthalten, ist die Wahl des Zeit-Nullpunktes beliebig, und eine der willkürlichen Konstanten in der Lösung der Gleichungen kann immer in Form einer additiven konstanten Zeit t_0 gewählt werden. Nach Eliminierung von $t + t_0$ aus den $2s$ Funktionen

$$q_i = q_i(t + t_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}),$$
$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(t + t_0, C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}),$$

drücken wir die $2s - 1$ freien Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_{2s-1}$ als Funktionen von q und $\dot{q}$ aus; sie stellen dann die Bewegungsintegrale dar.

Doch spielen keineswegs alle Bewegungsintegrale in der Mechanik eine gleich wichtige Rolle. Unter ihnen sind einige, deren Konstanz eine tiefe Ursache hat, die mit den Grundeigenschaften von Zeit und Raum — ihrer Homogenität und Isotropie — zusammenhängen. Diese sogenannten Erhaltungsgrößen haben alle die wichtige Eigenschaft der Additivität gemeinsam. Ihr Wert für ein System, das aus Teilen besteht, deren Wechselwirkung man vernachlässigen kann, ist gleich der Summe der Werte für jeden einzelnen Teil.

Gerade diese additive Eigenschaft weist den entsprechenden Größen eine besonders wichtige Rolle in der Mechanik zu. Nehmen wir z.B. an, daß zwei Körper nur im Laufe einer gewissen Zeit miteinander in Wechselwirkung stehen. Da sowohl vor als auch nach der Wechselwirkung jedes der Bewegungsintegrale des gesamten Systems gleich der Summe der Bewegungsintegrale der beiden Körper ist, so ergibt sich aus den Erhaltungssätzen dieser Größen sofort die Möglichkeit, eine Reihe von Schlüssen über die Zustände der Körper nach der Wechselwirkung zu ziehen, wenn ihre Zustände vor der Wechselwirkung bekannt sind.

Wir beginnen mit dem Erhaltungssatz, der aus der *Homogenität der Zeit* folgt.

Diese Homogenität bewirkt, daß die LAGRANGE-Funktion eines abgeschlossenen Systems nicht explizit von der Zeit abhängt. Aus diesem Grunde kann man die totale zeitliche Ableitung der LAGRANGE-Funktion in folgender Form schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i .$$

(Wenn L explizit von der Zeit abhinge, würde auf der rechten Seite der Gleichung das Glied $\partial L/\partial t$ hinzutreten.) Indem wir die Ableitung $\partial L/\partial q_i$ nach der LAGRANGE-Gleichung durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ersetzen, erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0 .$$

Hieraus folgt, daß die Größe

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \tag{6,1}$$

bei der Bewegung eines abgeschlossenen Systems erhalten bleibt, d. h., sie stellt eines der Bewegungsintegrale dar. Diese Größe heißt die *Energie* des Systems. Die Additivität der Energie folgt unmittelbar aus der Additivität der LAGRANGE-Funktion, durch die sie sich gemäß (6,1) linear ausdrückt. Der Erhaltungssatz der Energie gilt nicht nur für abgeschlossene Systeme, sondern auch für Systeme, die sich in einem konstanten Feld befinden (d. h. in einem Feld, das nicht von der Zeit abhängt); die einzige bei der Ableitung benutzte Eigenschaft der LAGRANGE-Funktion — nämlich die Abwesenheit einer expliziten Abhängigkeit von der Zeit — ist auch in diesem Fall vorhanden. Mechanische Systeme, deren Energie erhalten bleibt, heißen auch *konservative* Systeme.

Wie wir in § 5 gesehen haben, hat die LAGRANGE-Funktion eines abgeschlossenen Systems (oder eines Systems, das sich in einem konstanten Feld befindet) die Form

$$L = T(q, \dot{q}) - U(q) .$$

Hierin ist T eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten. Wenn man auf sie das bekannte EULERsche Theorem über homogene Funktionen anwendet, erhält man

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2\,T .$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in (6,1) finden wir

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) \tag{6,2}$$

und in kartesischen Koordinaten

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots) . \tag{6,3}$$

Auf diese Weise kann die Energie eines Systems in Form einer Summe von zwei wesentlich verschiedenen Gliedern dargestellt werden: der kinetischen Energie, die von den Geschwindigkeiten abhängt, und der potentiellen Energie, die nur von den Koordinaten der Teilchen abhängt.

§ 7. Impuls

Ein anderer Erhaltungssatz folgt aus der *Homogenität des Raumes.*

Aus dieser Homogenität ergibt sich, daß sich die Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems bei einer beliebigen räumlichen Parallelverschiebung des Systems als Ganzes nicht verändern. Dementsprechend betrachten wir eine unendlich kleine Verschiebung um die Strecke $\boldsymbol{\varepsilon}$ und fordern, daß die LAGRANGE-Funktion dabei unverändert bleibt.

Bei einer Parallelverschiebung werden alle Punkte des Systems um ein und dieselbe Strecke verschoben, d. h., ihre Radiusvektoren $\boldsymbol{r}_a$ werden zu $\boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{\varepsilon}$. Die Änderung der Funktion L durch diese infinitesimale Koordinatentransformation ist bei gleichbleibenden Geschwindigkeiten der Teilchen

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \delta \boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} .$$

Hierbei wird über alle Massenpunkte des Systems summiert. Da $\boldsymbol{\varepsilon}$ beliebig ist, wird die Forderung $\delta L = 0$ äquivalent mit

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} = 0 . \tag{7,1}$$

Mit der LAGRANGEschen Gleichung (5,2) erhalten wir daraus

$$\sum_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} = 0 .$$

Damit kommen wir zu dem Ergebnis, daß in einem abgeschlossenen mechanischen System die Vektorgröße

$$\boldsymbol{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \tag{7,2}$$

bei der Bewegung erhalten bleibt. Der Vektor $\boldsymbol{P}$ heißt *Impuls* des Systems. Durch Differenzieren der LAGRANGE-Funktion (5,1) finden wir, daß der Impuls sich folgendermaßen durch die Geschwindigkeiten der Massenpunkte ausdrückt:

$$\boldsymbol{P} = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a . \tag{7,3}$$

Die Additivität des Impulses ist offensichtlich. Darüber hinaus ist der Impuls des Systems im Gegensatz zur Energie gleich der Summe der Impulse

$$\boldsymbol{p}_a = m_a \boldsymbol{v}_a$$

der einzelnen Teilchen und zwar unabhängig davon, ob man die Wechselwirkung zwischen ihnen vernachlässigen kann.

Für alle drei Komponenten des Impulsvektors gilt ein Erhaltungssatz nur bei Abwesenheit eines äußeren Feldes. Einzelne Komponenten des Impulses können jedoch auch bei Vorhandensein eines Feldes erhalten bleiben, wenn nämlich die potentielle Energie des Feldes von irgendeiner der kartesischen Koordinaten nicht abhängt. Bei Verschiebung entlang der entsprechenden Koordinatenachse ändern sich die mechanischen Eigenschaften des Systems offenbar nicht; das bedeutet aber, daß die Projektion des Impulses auf die Achse eine Erhaltungsgröße ist. Im homogenen Feld z.B., dessen Richtung der z-Achse parallel ist, sind die x- und y-Komponenten des Impulses Erhaltungsgrößen.

Die Ausgangsgleichung (7,1) hat einen einfachen physikalischen Sinn. Die Ableitung $\partial L/\partial \boldsymbol{r}_a = -\partial U/\partial \boldsymbol{r}_a$ ist die Kraft $\boldsymbol{F}_a$, die auf das a-te Teilchen wirkt. Damit bedeutet die Gleichung (7,1), daß die Summe der Kräfte, die auf alle Teilchen eines abgeschlossenen Systems wirken, gleich Null ist:

$$\sum_a \boldsymbol{F}_a = 0 . \qquad (7,4)$$

Z.B. ist im Falle eines Systems von zwei Massenpunkten $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$. Die Kraft, mit der das zweite Teilchen auf das erste wirkt, hat dieselbe Größe, aber die entgegengesetzte Richtung wie die Kraft, mit der das erste Teilchen auf das zweite wirkt. Diese Aussage ist als *Gesetz der Gleichheit von Aktion und Reaktion* bekannt.

Wenn die Bewegung durch verallgemeinerte Koordinaten q_i beschrieben wird, so heißen die Ableitungen der LAGRANGE-Funktion nach den verallgemeinerten Geschwindigkeiten,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} , \qquad (7,5)$$

verallgemeinerte Impulse und die Ableitungen

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (7,6)$$

verallgemeinerte Kräfte. Mit diesen Bezeichnungen erhalten die LAGRANGE-Gleichungen die Form

$$\dot{q}_i = F_i . \qquad (7,7)$$

In kartesischen Koordinaten fallen die verallgemeinerten Impulse mit den Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{p}_a$ zusammen. Im allgemeinen Falle jedoch sind die Größen p_i lineare homogene Funktionen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$, die durchaus nicht Produkte von Masse mal Geschwindigkeit sein müssen.

§ 8. Schwerpunkt

Der Impuls eines abgeschlossenen mechanischen Systems hat in verschiedenen Inertialsystemen verschiedene Werte. Wenn sich das System K' relativ zum System K mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ bewegt, so sind die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_a'$ und $\boldsymbol{v}_a$ der Teilchen in diesen Systemen durch die Beziehung $\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_a' + \boldsymbol{V}$ verknüpft. Infolgedessen ergibt sich eine Beziehung zwischen den Werten $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{P}'$ des Impulses in diesen Systemen der Form

$$\boldsymbol{P} = \sum_b m_a \boldsymbol{v}_a = \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a' + \boldsymbol{V} \sum_a m_a ,$$

oder

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + \boldsymbol{V} \sum_a m_a . \tag{8,1}$$

Demnach existiert stets ein Bezugssystem K', in dem der Gesamtimpuls verschwindet. Indem wir in (8,1) $\boldsymbol{P}' = 0$ setzen, finden wir für die Geschwindigkeit dieses Bezugssystems

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{p}}{\sum m_a} = \frac{\sum m_a \boldsymbol{v}_a}{\sum m_a} . \tag{8,2}$$

Wenn der Gesamtimpuls eines mechanischen Systems gleich Null ist, so kann man sagen, daß das System in dem betreffenden Bezugssystem ruht. Dies ist eine ganz natürliche Verallgemeinerung des Begriffs der Ruhe beim einzelnen Massenpunkt. Dementsprechend nimmt die Geschwindigkeit V, die durch Formel (8,2) gegeben ist, den Sinn der Geschwindigkeit der „Bewegung eines mechanischen Systems als Ganzes" an, dessen Impuls von Null verschieden ist. Auf diese Weise sehen wir, daß der Erhaltungssatz des Impulses gestattet, auf natürliche Weise den Begriff der Ruhe und der Geschwindigkeit eines mechanischen Systems als Ganzes zu definieren.

Die Formel (8,2) zeigt, daß die Beziehung zwischen Impuls $\boldsymbol{P}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ des Gesamtsystems dieselbe ist wie die zwischen Impuls und Geschwindigkeit eines einzelnen Massenpunktes, dessen Masse $\mu = \sum m_a$ gleich der Summe der Massen aller Teilchen des Systems ist. Man kann daher sagen, daß die *Masse* eine *additive* Größe ist.

Die rechte Seite der Formel (8,2) kann als totale zeitliche Ableitung des Ausdrucks

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum m_a \boldsymbol{r}_a}{\sum m_a} \tag{8,3}$$

dargestellt werden. Die Geschwindigkeit des Gesamtsystems ist also gleich der Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt mit dem Radiusvektor (8,3) im Raum bewegt. Dieser Punkt heißt der *Schwerpunkt* des Systems. Der Erhaltungssatz des Impulses eines abgeschlossenen Systems kann demnach auch so formuliert werden: Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich geradlinig und

gleichförmig. Das ist eine Verallgemeinerung des Trägheitsgesetzes, das in § 3 für einen einzelnen freien Massenpunkt abgeleitet worden war, dessen „Schwerpunkt" mit dem Punkt selbst zusammenfällt.

Bei Untersuchungen der mechanischen Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems benutzt man natürlich dasjenige Bezugssystem, in dem der Schwerpunkt ruht. Auf diese Weise wird die gleichförmige und geradlinige Bewegung des Gesamtsystems aus der Betrachtung eliminiert.

Die Energie des als Ganzes ruhenden Systems wird gewöhnlich als *innere Energie* E_{in} bezeichnet. Sie enthält die kinetische Energie der Relativbewegung der Teilchen in dem System und die potentielle Energie ihrer Wechselwirkung. Die Gesamtenergie eines Systems, das sich als Ganzes mit der Geschwindigkeit V bewegt, kann in der Form

$$E = \frac{\mu V^2}{2} + E_{\text{in}} \tag{8,4}$$

dargestellt werden. Obwohl die Richtigkeit dieser Formel einleuchtet, geben wir noch ihre Ableitung.

Die Energien E und E' eines mechanischen Systems in zwei Bezugssystemen K und K' sind durch die Beziehung

$$E = \frac{1}{2} \sum_a m_a v_a^2 + U = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{v}_a' + \boldsymbol{V})^2 + U$$

$$= \frac{\mu V^2}{2} + \boldsymbol{V} \sum_a m_a \boldsymbol{v}_a' + \sum_a \frac{m_a v_a'^2}{2} + U$$

oder

$$E = E' + \boldsymbol{V}\boldsymbol{P}' + \frac{\mu V^2}{2} \tag{8,5}$$

verknüpft. Diese Formel ist das Transformationsgesetz der Energie beim Übergang von einem Bezugssystem zu einem anderen, gerade so, wie Formel (8,1) das Transformationsgesetz des Impulses darstellte. Wenn der Schwerpunkt im System K' ruht, so ist $\boldsymbol{P}' = 0$, $E' = E_{\text{in}}$, und wir bekommen (8,4).

§ 9. Drehimpuls

Wir gehen nun zur Ableitung des Erhaltungssatzes über, der aus der *Isotropie des Raumes* folgt.

Isotropie bedeutet, daß die mechanischen Eigenschaften eines abgeschlossenen Systems sich bei einer beliebigen Drehung des Gesamtsystems im Raume nicht ändern. Dementsprechend betrachten wir eine unendlich kleine Drehung des Systems und fordern, daß seine LAGRANGE-Funktion dabei ungeändert bleibt.

Wir führen den Vektor $\delta\boldsymbol{\varphi}$ einer infinitesimalen Drehung ein, dessen Betrag gleich dem Drehwinkel $\delta\varphi$ ist und dessen Richtung mit der Drehachse zusammen-

fällt (und zwar so, daß die Drehrichtung mit der Richtung von $\delta\boldsymbol{\varphi}$ eine Rechtsschraube bildet).

Zunächst wollen wir den durch eine solche Drehung verursachten Zuwachs eines Radiusvektors bestimmen, der vom Koordinatenanfangspunkt (der auf der Drehachse liegt) zu irgendeinem Massenpunkt des sich drehenden Systems verläuft. Die lineare Verschiebung des Endes des Radiusvektors ist mit dem Winkel durch die Beziehung $|\delta\boldsymbol{r}| = r \sin\Theta \cdot \delta\varphi$ verknüpft (Abb. 3). Der Vektor $\delta\boldsymbol{r}$ steht senkrecht auf der durch $\boldsymbol{r}$ und $\delta\boldsymbol{\varphi}$ aufgespannten Ebene.

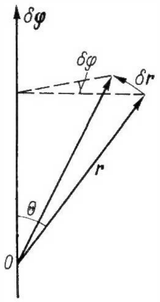


Abb. 3

Daher gilt

$$\delta\boldsymbol{r} = [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{r}] \,. \tag{9,1}$$

Bei Drehung des Systems ändert sich nicht nur die Richtung der Radiusvektoren, sondern auch die der Geschwindigkeiten aller Teilchen; dabei transformieren sich alle Vektoren nach dem gleichen Gesetz. Damit wird der Zuwachs der Geschwindigkeit gegenüber der im ursprünglichen Koordinatensystem

$$\delta\boldsymbol{v} = [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{v}] \,. \tag{9,2}$$

Diese Ausdrücke setzen wir in die Bedingung für die Konstanz der LAGRANGE-Funktion bei Drehung,

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}_a} \delta\boldsymbol{r}_a + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_a} \delta\boldsymbol{v}_a\right) = 0 \,,$$

ein und erhalten durch Einsetzen von $\partial L/\partial \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{p}_a$ und $\partial L/\partial \boldsymbol{r}_a = \dot{\boldsymbol{p}}_a$:

$$\sum_a (\dot{\boldsymbol{p}}_a [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{r}_a] + \boldsymbol{p}_a [\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{v}_a]) = 0 \,.$$

Nach zyklischer Vertauschung der Faktoren und Ausklammern von $\delta\boldsymbol{\varphi}$ finden wir:

$$\delta\boldsymbol{\varphi} \sum_a ([\boldsymbol{r}_a \dot{\boldsymbol{p}}_a] + [\boldsymbol{v}_a \boldsymbol{p}_a]) = \delta\boldsymbol{\varphi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_a [\boldsymbol{r}_a \boldsymbol{p}_a] = 0 \,.$$

Da dies für beliebige $\delta\boldsymbol{\varphi}$ gelten muß, folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_a [\boldsymbol{r}_a \boldsymbol{p}_a] = 0 \,.$$

Damit kommen wir zu dem Ergebnis, daß bei der Bewegung eines abgeschlossenen Systems der Vektor

$$M = \sum_a [r_a p_a] \tag{9,3}$$

eine Erhaltungsgröße ist. Er heißt *Drehimpuls* des Systems. Die Additivität dieser Größe ist offensichtlich und hängt, wie beim Impuls, nicht davon ab, ob zwischen den Teilchen eine Wechselwirkung besteht oder nicht.

Damit sind die additiven Bewegungsintegrale erschöpft, so daß jedes abgeschlossene System im ganzen 7 davon besitzt: die Energie und je 3 Komponenten des Impulses und des Drehimpulses.

Da in die Definition des Drehimpulses die Radiusvektoren der Teilchen eingehen, hängt der Drehimpuls im allgemeinen von der Wahl des Nullpunktes ab. Zwischen den Radiusvektoren r_a und r'_a ein und desselben Punktes bezüglich zweier Koordinatenanfangspunkte, die um die Strecke a voneinander entfernt sind, besteht die Beziehung $r_a = r'_a + a$. Damit erhalten wir

$$M = \sum_a [r_a p_a] = \sum_a [r'_a p_a] + [a \sum_a p_a]$$

oder

$$M = M' + [a P] . \tag{9,4}$$

Aus dieser Formel ist zu ersehen, daß nur dann, wenn das System als Ganzes ruht (d. h. $P = 0$), sein Drehimpuls nicht von der Wahl des Nullpunktes abhängt. Auf den Erhaltungssatz des Drehimpulses wirkt sich diese Unbestimmtheit natürlich nicht aus, da auch der Impuls eines abgeschlossenen Systems eine Erhaltungsgröße ist.

Wir wollen noch eine Formel ableiten, welche die Werte des Drehimpulses in zwei verschiedenen Inertialsystemen K und K' miteinander verknüpft, von denen das zweite sich mit der Geschwindigkeit V relativ zum ersten bewegt. Wir wollen annehmen, daß die Systeme K und K' in dem betrachteten Zeitpunkt zusammenfallen. Dann sind die Radiusvektoren der Teilchen in beiden Systemen gleich, und für die Geschwindigkeiten gilt $v_a = v'_a + V$. Damit erhalten wir

$$M = \sum_a m_a [r_a v_a] = \sum_a m_a [r_a v'_a] + \sum_a m_a [r_a V] .$$

Die erste Summe auf der rechten Seite ist der Drehimpuls M' im System K'; wenn wir in die zweite Summe den Radiusvektor des Schwerpunktes gemäß (8,3) einführen, entsteht

$$M = M' + \mu [R V] . \tag{9,5}$$

Diese Formel stellt das Transformationsgesetz des Drehimpulses bei Übergang von einem Bezugssystem zu einem anderen dar, und tritt neben die analogen Gesetze für Impuls und Energie, Formeln (8,1) und (8,5).

Wenn K' dasjenige Bezugssystem ist, in dem das mechanische System als Ganzes ruht, so ist V die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des mechanischen

Systems und $\mu \boldsymbol{V}$ sein Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}$ (bezüglich K). Dann wird

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}' + [\boldsymbol{R}\, \boldsymbol{P}]\,. \tag{9,6}$$

Mit anderen Worten: Der Drehimpuls $\boldsymbol{M}$ setzt sich aus dem „Eigendrehimpuls", d. h. dem Drehimpuls im Ruhsystem des Schwerpunkts, und dem Drehimpuls $[\boldsymbol{R}\, \boldsymbol{P}]$ zusammen, der von der Bewegung des Systems als Ganzes herrührt.

Für jede der drei Komponenten des Drehimpulses (bezogen auf einen beliebigen Nullpunkt) gilt nur bei abgeschlossenen Systemen gleichzeitig ein Erhaltungssatz; in eingeschränkter Form kann man einen solchen aber auch unter Umständen bei Systemen in äußeren Feldern aufstellen.

Aus obiger Ableitung folgt offenbar, daß stets die Projektion des Drehimpulses auf eine Symmetrieachse des gegebenen Feldes erhalten bleibt, da die mechanischen Eigenschaften des Systems sich bei einer beliebigen Drehung um diese Achse nicht ändern; dabei muß der Drehimpuls natürlich auf einen Punkt (Koordinatenanfangspunkt) bezogen sein, der auf dieser Achse liegt.

Der wichtigste Fall ist das kugelsymmetrische Feld, in dem die potentielle Energie nur vom Abstand von einem bestimmten Raumpunkt (Zentrum) abhängt. Bei der Bewegung in einem solchen Feld bleibt offensichtlich die Projektion des Drehimpulses auf eine beliebige Achse durch das Zentrum erhalten. Mit anderen Worten: Der gesamte Drehimpulsvektor $\boldsymbol{M}$ ist eine Erhaltungsgröße, wenn er bezüglich des Zentrums des Feldes definiert ist, nicht aber, wenn er auf irgendeinen anderen Raumpunkt bezogen wird.

Ein anderes Beispiel: Ein homogenes Feld längs der z-Achse; in ihm ist die Projektion M_z des Drehimpulses eine Erhaltungsgröße, wobei der Nullpunkt beliebig gewählt werden kann.

Wir bemerken, daß die Projektion des Drehimpulses auf irgendeine Achse (wir nennen sie die z-Achse), durch Differenzieren der Lagrange-Funktion gemäß der Formel

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_a} \tag{9,7}$$

gefunden werden kann; hierin ist die Koordinate φ der Drehwinkel um die z-Achse. Das folgt bereits aus dem Charakter der oben dargelegten Ableitung des Drehimpulserhaltungssatzes; man kann sich davon aber auch durch direkte Ausrechnung überzeugen. In Zylinderkoordinaten r, φ, z haben wir (nach der Substitution $x_a = r_a \cos \varphi_a$, $y_a = r_a \sin \varphi_a$):

$$M_z = \sum_a m_a (x_a \dot{y}_a - y_a \dot{x}_a) = \sum_a m_a r_a^2 \dot{\varphi}_a\,. \tag{9,8}$$

Andererseits hat die Lagrange-Funktion in diesen Variablen die Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\dot{r}_a^2 + r_x^2 \dot{\varphi}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U\,,$$

und Einsetzen dieses Ausdrucks in (9,7) führt wiederum zu der Formel (9,8).

Aufgabe

Welche Komponenten des Impulses $\boldsymbol{P}$ und des Drehimpulses $\boldsymbol{M}$ bleiben bei der Bewegung in folgenden Feldern erhalten:

a) Feld einer unendlichen homogenen Ebene.

Lösung: P_x, P_y, M_z (die unendliche Ebene ist die xy-Ebene).

b) Feld eines unendlichen homogenen Kreiszylinders.

Lösung: M_z, P_z (die Zylinderachse ist die z-Achse).

c) Feld eines unendlichen homogenen Prismas.

Lösung: P_z (die Kanten des Primas laufen parallel zur z-Achse).

d) Feld von zwei Punkten.

Lösung: M_z (die Punkte befinden sich auf der z-Achse).

e) Feld einer unendlichen homogenen Halbebene.

Lösung: P_y (die unendliche Halbebene ist der Teil der xy-Ebene, der durch die y-Achse begrenzt wird).

f) Feld eines homogenen Kegels.

Lösung: M_z (die Achse ist die z-Achse).

Integration der Bewegungsgleichungen III

§ 10. Eindimensionale Bewegung

Die Bewegung eines Systems mit einem einzigen Freiheitsgrad heißt *eindimensional.* Die allgemeinste Form der LAGRANGE-Funktion eines solchen Systems, das sich unter konstanten äußeren Bedingungen befindet, lautet

$$L = \frac{1}{2} a(q)\, \dot{q}^2 - U(q)\,. \tag{10,1}$$

Hierin ist $a(q)$ eine Funktion der verallgemeinerten Koordinate q. Wenn q eine kartesische Koordinate ist (wir nennen sie x), so gilt

$$L = \frac{m\, \dot{x}^2}{2} - U(x)\,. \tag{10,2}$$

Die Bewegungsgleichungen, die solchen LAGRANGE-Funktionen entsprechen, lassen sich in allgemeiner Form integrieren. Dabei ist es nicht einmal nötig, die Bewegungsgleichung selbst hinzuschreiben, sondern man kann unmittelbar von dem ersten Integral ausgehen, d. h. von der Gleichung, die den Erhaltungssatz der Energie ausdrückt. Für die LAGRANGE-Funktion (10,2) heißt das

$$\frac{m\, \dot{x}^2}{2} + U(x) = E\,.$$

Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, die sich durch Trennung der Veränderlichen integrieren läßt. Wir erhalten

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\,[E - U(x)]}$$

und damit

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + \text{const}\,. \tag{10,3}$$

Hier spielen die Gesamtenergie E und eine Integrationskonstante (const) die Rolle der beiden freien Konstanten in der Lösung der Bewegungsgleichung.

Da die kinetische Energie eine wesentlich positive Größe ist, muß bei der Bewegung die Gesamtenergie stets größer als die potentielle Energie sein, d. h., die Bewegung kann nur in solchen Gebieten verlaufen, wo $U(x) < E$ ist.

Die Funktion $U(x)$ habe z. B. die in Abb. 4 dargestellte Form. Wenn man eine horizontale Gerade einzeichnet, die der gegebenen Gesamtenergie E entspricht, so kann man die für die Bewegung zugelassenen Gebiete direkt ablesen.

Bei Abb. 4 sind das die Strecke AB und das Gebiet rechts von C.

Die Punkte, in denen die potentielle Energie gleich der Gesamtenergie ist,

$$U(x) = E\,, \tag{10,4}$$

bestimmen die Grenzen der Bewegung. Es sind *Umkehrpunkte,* da in ihnen die Geschwindigkeit ihre Richtung umkehrt. Wenn das für die Bewegung zulässige Gebiet auf beiden Seiten durch solche Punkte begrenzt ist, verläuft sie in einem endlichen räumlichen Bereich; man sagt, sie ist begrenzt. Wenn das Gebiet nicht oder nur auf einer Seite begrenzt ist, wird die Bewegung unbegrenzt, das Teilchen läuft ins Unendliche.

Die eindimensionale finite Bewegung ist eine Schwingung: Das Teilchen führt eine periodische Bewegung zwischen den beiden Grenzen aus (in Abb. 4 in der *Potentialmulde* AB zwischen den Punkten x_1 und x_2). Hierbei ist gemäß

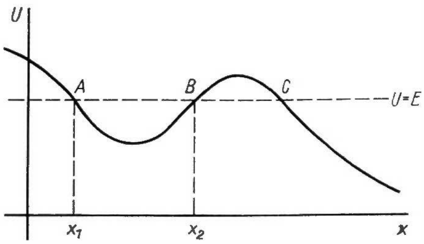


Abb. 4

der allgemeinen Reversibilitätseigenschaft (Seite 11) die Laufzeit von x_1 nach x_2 gleich der von x_2 nach x_1. Infolgedessen ist die Periode T der Schwingung, d. h. die Zeit, in der der Punkt von x_1 nach x_2 und wieder zurück läuft, gleich der doppelten Laufzeit von x_1 nach x_2, also nach (10,3)

$$T(E) = \sqrt{2\,m} \int\limits_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}\,. \tag{10,5}$$

Hierin sind die Grenzen x_1 und x_2 Wurzeln der Gleichung (10,4) bei gegebener Energie E. Diese Formel liefert die Periode der Bewegung in Abhängigkeit von der Gesamtenergie des Teilchens.

§ 11. Reduzierte Masse

Das äußerst wichtige Problem der Bewegung eines Systems, das aus zwei miteinander in Wechselwirkung stehenden Teilchen besteht (*Zweikörper-Problem*), läßt eine vollständige Lösung in allgemeiner Form zu.

Als vorläufigen Schritt zur Lösung dieser Aufgabe zeigen wir, wie sie wesentlich vereinfacht werden kann, indem man die Bewegung des Systems in die Bewegung des Schwerpunktes und die Relativbewegung der Körper bezüglich des Schwerpunktes zerlegt.

Die potentielle Energie der Wechselwirkung zweier Teilchen hängt nur von ihrem gegenseitigen Abstand ab, d. h. vom Betrag der Differenz ihrer Radiusvektoren. Daher lautet die LAGRANGE-Funktion eines solchen Systems

$$L = \frac{m_1 \dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) . \tag{11,1}$$

Wir führen den Abstandsvektor der beiden Punkte

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

ein und legen den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt, so daß sich ergibt:

$$m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2 = 0 .$$

Aus den beiden letzten Gleichungen finden wir

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r} , \qquad \boldsymbol{r}_2 = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{r} . \tag{11,2}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in (11,1) liefert

$$L = \frac{m \dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r) , \tag{11,3}$$

worin die Bezeichnung

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{11,4}$$

eingeführt ist; die Größe m heißt *reduzierte Masse.* Die Funktion (11,3) gleicht formal der LAGRANGE-Funktion eines Teilchens der Masse m, das sich in einem äußeren Feld $U(r)$ bewegt, welches kugelsymmetrisch um einen festen Koordinatenursprung ist.

Auf diese Weise wird das Problem der Bewegung zweier miteinander in Wechselwirkung stehender Massenpunkte auf das Problem der Bewegung eines Punktes in einem gegebenen äußeren Feld $U(\boldsymbol{r})$ zurückgeführt. Aus der Lösung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ dieser Aufgabe ergeben sich die Bahngleichungen $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_1(t)$ und $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2(t)$ der beiden Teilchen m_1 und m_2 (bezüglich ihres gemeinsamen Schwerpunktes) aus den Formeln (11,2).

§ 12. Bewegung im Zentralfeld

Indem wir das Problem der Bewegung zweier Körper auf das der Bewegung eines einzigen Körpers zurückgeführt haben, sind wir zu der Aufgabe gelangt, die Bewegung eines Teilchens in einem äußeren Felde zu bestimmen, dessen potentielle Energie nur vom Abstand r von einem bestimmten festen Punkt abhängt; ein solches Feld heißt *Zentralfeld.* Auch die Kraft

$$\boldsymbol{F} = - \frac{\partial U(r)}{\partial \boldsymbol{r}} = - \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r} \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

die auf das Teilchen wirkt, hängt hierbei dem Betrag nach nur von r ab und hat in jedem Punkte die Richtung des Radiusvektors. Wie in § 9 schon erwähnt wurde, ist bei der Bewegung in einem Zentralfeld der auf das Zentrum bezogene Drehimpuls des Systems eine Erhaltungsgröße. Für ein einzelnes Teilchen ist dieser

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}] .$$

Da die Vektoren $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{r}$ senkrecht aufeinander stehen, bedeutet die Konstanz von $\boldsymbol{M}$, daß bei der Bewegung des Teilchens sein Radiusvektor stets in einer Ebene bleibt, die senkrecht zu $\boldsymbol{M}$ liegt.

Die Bahn eines Teilchens in einem Zentralfeld liegt also vollständig in einer Ebene. Wenn wir für diese Ebene die Ebene des Polarkoordinatensystems r, φ mit dem Ursprung im Zentrum des Feldes wählen, so erhalten wir die LAGRANGE-Funktion in der Form (vgl. (4,5))

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\varphi}^2) - U(r) . \tag{12,1}$$

Diese Funktion enthält die Koordinate φ nicht in expliziter Form. Jede verallgemeinerte Koordinate q_i, die nicht explizit in die LAGRANGE-Funktion eingeht, heißt *zyklisch.* Infolge der LAGRANGEschen Gleichung gilt für eine solche Koordinate

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} = \frac{\partial L}{\partial q} = 0 ,$$

d. h., der entsprechende verallgemeinerte Impuls $p_i = \partial L/\partial \dot{p}_i$ ist ein Bewegungsintegral. Dieser Umstand führt zu einer wesentlichen Vereinfachung der Integration der Bewegungsgleichungen bei Vorhandensein von zyklischen Koordinaten.

Im vorliegenden Fall fällt der verallgemeinerte Impuls

$$p_\varphi = m\,r^2\,\dot{\varphi}$$

mit dem Drehimpuls $M_z = M$ (vgl. (9,8)) zusammen, so daß wir zu dem uns schon bekannten Erhaltungssatz des Drehimpulses zurückkehren:

$$M = m\,r^2\,\dot{\varphi} = \text{const} . \tag{12,2}$$

Wir bemerken, daß dieses Gesetz für die ebene Bewegung eines einzelnen Teilchens im Zentralfeld eine einfache geometrische Deutung gestattet. Der Ausdruck $\frac{1}{2}\,r \cdot r\,\mathrm{d}\varphi$ stellt die Fläche des Sektors dar, der von zwei unendlich dicht benachbarten Radiusvektoren und dem dazwischenliegenden Bahnelement gebildet wird (Abb. 5). Wir bezeichnen diese Fläche mit $\mathrm{d}f$ und schreiben den Drehimpuls des Teilchens in der Form

$$M = 2\,m\,\dot{f} . \tag{12,3}$$

Die Ableitung von f heißt *Flächengeschwindigkeit.* Erhaltung des Drehimpulses bedeutet also Konstanz der Flächengeschwindigkeit: Der Radiusvektor des sich bewegenden Punktes überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (*zweites* KEPLER*sches Gesetz*). Der Drehimpuls-Erhaltungssatz wird bei Bewegung im Zentralfeld oft als *Flächensatz* bezeichnet.

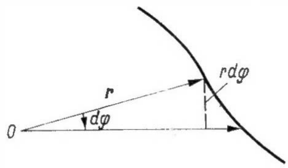


Abb. 5

Zur vollständigen Lösung des Problems der Bewegung eines Teilchens im Zentralfeld gelangt man am einfachsten, wenn man von den Erhaltungssätzen der Energie und des Drehimpulses ausgeht, ohne die Bewegungsgleichungen selbst aufzuschreiben. Indem wir $\dot{\varphi}$ durch M aus (12,2) ausdrücken und in den Ausdruck für die Energie einsetzen, erhalten wir

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)\,. \tag{12,4}$$

Daraus ergibt sich

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}} \tag{12,5}$$

und durch Integration nach Trennung der Veränderlichen

$$t = \int \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} + \text{const}\,. \tag{12,6}$$

Wenn wir (14,2) in der Form

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{M}{mr^2}\mathrm{d}t$$

schreiben, dt aus (12,5) einsetzen und integrieren, entsteht

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{r^2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const}\,. \tag{12,7}$$

Die Formeln (12,6) und (12,7) lösen die gestellte Aufgabe in allgemeiner Form. Die zweite Formel stellt die Beziehung zwischen r und φ dar, d. h., sie ist die Bahngleichung. Die Formel (12,6) bestimmt in impliziter Form die Zeit-Abhängigkeit des Abstandes r des bewegten Punktes vom Zentrum. Wir bemerken,

daß sich der Winkel φ monoton mit der Zeit ändert; denn aus (12,2) ist ersichtlich, daß $\dot{\varphi}$ niemals sein Vorzeichen ändert.

Der Ausdruck (12,4) zeigt, daß man den Radialteil der Bewegung als eindimensionale Bewegung in einem Feld mit der *effektiven* potentiellen Energie

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2\, m\, r^2} \tag{12,8}$$

betrachten kann. Die Größe $M^2/2\,\mathrm{m}\,r^2$ heißt *Zentrifugalenergie*. Die r-Werte, bei denen

$$U(r) + \frac{M^2}{2\, m\, r^2} = E \tag{12,9}$$

ist, bestimmen die Grenzen des Bewegungsbereiches. Wenn Gleichung (12,9) erfüllt ist, wird die radiale Geschwindigkeitskomponente $\dot{r}$ gleich Null.

Das bedeutet nicht, daß das Teilchen anhält (wie bei der echten eindimensionalen Bewegung), da die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ im allgemeinen nicht verschwindet. Die Gleichung $\dot{r} = 0$ bestimmt den *Umkehrpunkt* der Bahn, in ihm hat die Funktion $r(t)$ ein Minimum oder ein Maximum.

Wenn der zulässige r-Bereich nur durch die eine Bedingung $r \geqq r_{\min}$ eingeschränkt wird, ist die Bewegung des Teilchens unbegrenzt: Die Bahn kommt aus dem Unendlichen und verschwindet wieder im Unendlichen.

Liegen dagegen die zulässigen r-Werte zwischen zwei Grenzen $r_{\min}$ und $r_{\max}$, so ist die Bewegung begrenzt, und die Bahn verläuft vollständig in dem ringförmigen Gebiet, das durch die Kreise $r = r_{\max}$ und $r = r_{\min}$ begrenzt wird. Das bedeutet jedoch nicht, daß die Bahn auf jeden Fall geschlossen ist. Während r sich von $r_{\max}$ bis $r_{\min}$ und dann wieder bis $r_{\max}$ ändert, dreht sich der Radiusvektor um den Winkel $\Delta\varphi$, für den sich nach (12,7)

$$\Delta\varphi = 2 \int\limits_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M}{r^2}\, \mathrm{d}r}{\sqrt{2\, m\, (E - U) - \frac{M^2}{r^2}}} \tag{12,10}$$

ergibt.

Die Bahn bildet nur dann eine geschlossene Kurve, wenn dieser Winkel ein rationaler Teil von 2π ist, d. h. wenn $\Delta\varphi = 2\pi \frac{n_1}{n_2}$ gilt, wo n_1 und n_2 ganze Zahlen sind. Nach n_2-maliger Wiederholung der zugehörigen Zeitperiode hat der Radiusvektor des Punktes n_1 ganze Umläufe ausgeführt und fällt mit seinem Ausgangswert wieder zusammen, d. h., die Kurve schließt sich.

Solche Fälle sind jedoch Ausnahmen, und bei beliebiger Form von $U(r)$ wird der Winkel $\Delta\varphi$ kein rationaler Teil von 2π sein. Darum ist die Bahn bei finiter Bewegung im allgemeinen nicht geschlossen. Sie läuft unendlich oft

durch beide Umkehrpunkte (wie z.B. in Abb. 6) und überstreicht in unendlich langer Zeit die gesamte Ringfläche zwischen den beiden begrenzenden Kreisen.

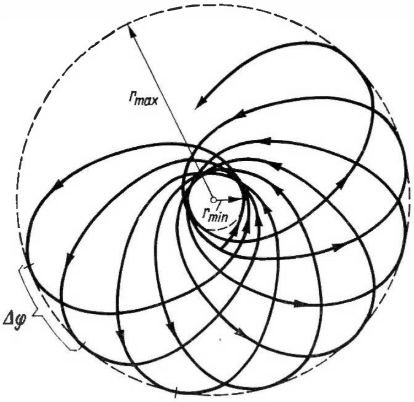


Abb. 6

Es existieren nur zwei Typen von Zentralfeldern, in denen alle Bahnen finiter Bewegungen geschlossen sind. Das sind die Felder, bei denen die potentielle Energie des Teilchens proportional zu $1/r$ oder zu r^2 ist. Der erste dieser beiden Fälle wird im folgenden Paragraphen behandelt, der zweite stellt den sogenannten räumlichen Oszillator dar (vgl. Aufgabe 3, § 19).

§ 13. Das KEPLER-Problem

Besonders wichtig sind die Zentralfelder, bei denen die potentielle Energie umgekehrt proportional zu r, die zugehörige Kraft also umgekehrt proportional zu r^2 ist. Hierher gehören das NEWTONsche Gravitationsfeld und das elektrostatische COULOMB-Feld; das erstere wirkt bekanntlich anziehend, während das letztere entweder anziehend oder abstoßend sein kann.

Wir betrachten zunächst das Anziehungsfeld, in dem

$$U = -\frac{\alpha}{r} \tag{13,1}$$

mit positiver Konstante α ist. Die Kurve der *effektiven* potentiellen Energie

$$U_{\text{eff}} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \tag{13,2}$$

hat die in Abb. 7 dargestellte Form. Für $r \to 0$ geht sie gegen $+\infty$, für $r \to \infty$ geht sie von negativen Werten her gegen Null; bei $r = \frac{M^2}{\alpha m}$ hat sie ein Minimum mit dem Wert

$$(U_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}. \tag{13,3}$$

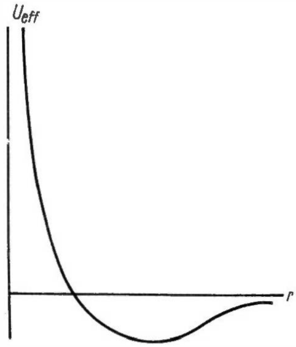


Abb. 7

Aus der Kurve folgt sofort, daß die Bewegung des Teilchens bei $E \gtrless 0$ infinit, bei $E < 0$ finit ist.

Die Form der Bahn erhält man mit Hilfe der allgemeinen Formel (12,7). Wenn wir dort $U = -\alpha/r$ einsetzen und elementar integrieren, bekommen wir

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{m\alpha}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M^2}}} + \text{const}.$$

Die Bezugsrichtungen für den Winkel φ wählen wir so, daß const $= 0$ wird. Mit den Bezeichnungen

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}, \qquad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \tag{13,4}$$

nimmt dann die Bahngleichung die Form

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos\varphi \tag{13,5}$$

an. Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes mit dem Brennpunkt im Koordinatenursprung; p heißt *Parameter*, e *Exzentrizität* der Bahn. Die Wahl der Bezugsrichtung von φ bedeutet, wie man aus (13,5) abliest, daß der Punkt mit $\varphi = 0$ der dem Zentrum nächstgelegene Punkt (das sogenannte *Perihel* der Bahn) ist.

In dem äquivalenten Problem zweier Körper, die nach dem Gesetz (13,1) miteinander in Wechselwirkung stehen, stellt die Bahn eines jeden Teilchens ebenfalls einen Kegelschnitt dar, und zwar mit dem Brennpunkt im gemeinsamen Schwerpunkt.

Aus (13,4) sieht man, daß bei $E < 0$ die Exzentrizität $e < 1$, die Bahn also eine Ellipse (Abb. 8) und damit begrenzt ist, wie es dem am Anfang des Paragraphen Gesagten entspricht. Bekannte Formeln der analytischen Geometrie

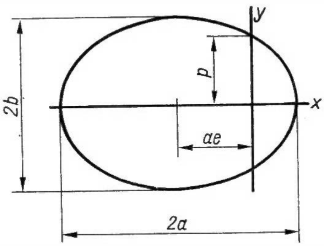


Abb.8

liefern für die große und die kleine Halbachse der Ellipse

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\alpha}{2\,|E|}\,, \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{M}{\sqrt{2\,m\,|E|}}\,. \tag{13,6}$$

Der kleinste zulässige Wert der Energie E fällt mit (13,3) zusammen; dabei ist $e = 0$, d. h., die Ellipse geht in einen Kreis über. Es sei bemerkt, daß die große Halbachse der Ellipse nur von der Energie (nicht aber vom Drehimpuls) des Teilchens abhängt. Für den kleinsten und den größten Abstand vom Zentrum des Feldes (Brennpunkt der Ellipse) gilt:

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + e}\, a\,(1 - e)\,, \qquad r_{\max} = \frac{p}{1 - e} = a\,(1 + e)\,. \tag{13,7}$$

Diese Ausdrücke (mit a und e aus (13,6) und (13,4)) hätte man selbstverständlich auch unmittelbar als Wurzeln der Gleichung $U_{\text{eff}}(r) = E$ erhalten können.

Die Umlaufzeit auf der Ellipsenbahn, d. h. die Periode T der Bewegung, berechnet man zweckmäßigerweise mit Hilfe des Drehimpulserhaltungssatzes in der Form (12,3) (Konstanz der Flächengeschwindigkeit). Integration dieser Gleichung über die Zeit von 0 bis T ergibt

$$2\,m\,f = T\,M\,,$$

wo f die von der Bahn umschlossene Fläche ist. Für die Ellipse gilt $f = \pi\,a\,b$, und mit Hilfe der Formel (13,6) finden wir

$$T = 2\,\pi\,a^{3/2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}} = \pi\,a\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}\,. \tag{13,8}$$

Dabei ist das Quadrat der Periode proportional der 3. Potenz der linearen Ausmaße der Bahn (sogenanntes drittes Keplersches Gesetz). Es sei noch bemerkt, daß die Periode nur von der Energie des Teilchens abhängt.

$E \geqq 0$ führt zu einer unbegrenzten Bewegung. Für $E > 0$ folgt $e > 1$, d. h., die Bahn ist eine Hyperbel, die das Zentrum des Feldes (Brennpunkt) einschließt, wie Abb. 9 zeigt. Als Perihelabstand ergibt sich

$$r_{\min} = \frac{p}{e + 1} = a\,(e - 1)\,, \tag{13,9}$$

wobei

$$a = \frac{p}{e^2 - 1} = \frac{\alpha}{2E}$$

die *Halbachse der* Hyperbel bedeutet.

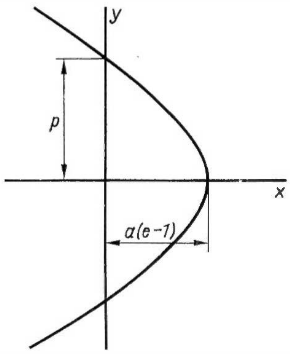


Abb. 9

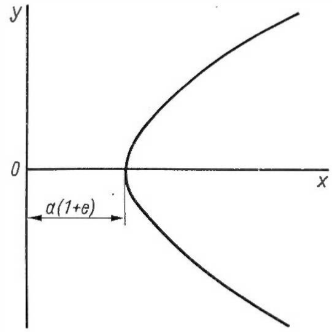


Abb. 10

Im Falle $E = 0$ ist die Exzentrizität $e = 1$, d. h., das Teilchen bewegt sich auf einer Parabel mit dem Perihelabstand $r_{\min} = p/2$. Dieser Fall ist verwirklicht, wenn das Teilchen seine Bewegung im Unendlichen mit der Geschwindigkeit Null beginnt.

Wir wenden uns nun der Bewegung im abstoßenden Feld zu, in dem

$$U = \frac{\alpha}{r} \tag{13,10}$$

ist ($\alpha < 0$). In diesem Falle nimmt die *effektive* potentielle Energie

$$U_{\text{eff}} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

monoton von $+\infty$ bis 0 ab, wenn r sich von 0 bis ∞ ändert. Die Energie des Teilchens kann nur positiv sein, und die Bewegung ist stets infinit. Sämtliche Rechnungen für diesen Fall sind völlig analog den oben durchgeführten. Die Bahn ist eine Hyperbel (oder eine Parabel bei $E = 0$):

$$\frac{p}{r} = -1 + e\cos\varphi \tag{13,11}$$

(p und e sind durch Formeln (13,4) definiert). Sie führt am Zentrum des Feldes vorbei, wie Abb. 10 zeigt.

Für den Perihelabstand gilt

$$r_{\min} = \frac{p}{e-1} = a(e+1)\,. \tag{13,12}$$

Der Stoß von Teilchen

IV

§ 14. Elastischer Stoß

Die Erhaltungssätze des Impulses und der Energie gestatten bereits in vielen Fällen eine Reihe wichtiger Schlüsse über die Eigenschaften verschiedener mechanischer Prozesse zu ziehen. Hierbei ist der Umstand besonders wesentlich, daß diese Eigenschaften von der konkreten Art der Wechselwirkung zwischen den am Prozeß beteiligten Teilchen völlig unabhängig sind.

Wir betrachten den *elastischen* Stoß zweier Teilchen, d. h. einen Stoß, bei dem der innere Zustand der Teilchen unverändert bleibt. Infolgedessen braucht man bei der Anwendung des Energieerhaltungssatzes auf einen solchen Stoß die innere Energie der Teilchen nicht zu berücksichtigen.

Als *Laborsystem* werden wir ein System bezeichnen, in dem sich eines der Teilchen (es sei das Teilchen m_2) bis zum Stoß in Ruhe befindet und ein anderes (m_1) sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt. Die Formeln für den Stoß nehmen die einfachste Form in dem Bezugssystem an, in dem der Schwerpunkt beider Teilchen ruht (*Schwerpunktsystem*); die Werte der Größen in diesem System werden wir durch den Index 0 kennzeichnen. Die Geschwindigkeiten der Teilchen im Schwerpunktsystem sind mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ im Laborsystem durch die Beziehungen

$$\boldsymbol{v}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}\,, \qquad \boldsymbol{v}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\boldsymbol{v}$$

verknüpft (vgl. (11,2)).

Infolge des Impulserhaltungssatzes sind die Impulse beider Teilchen nach dem Stoß dem Betrag nach einander gleich aber entgegengesetzt gerichtet, und infolge des Erhaltungssatzes der Energie bleiben ihre absoluten Größen erhalten. Daher besteht das Ergebnis des Stoßes im Schwerpunktsystem in einer Drehung der Geschwindigkeitsvektoren beider Teilchen, wobei die Geschwindigkeiten entgegengesetzt gerichtet und dem Betrag nach erhalten bleiben. Wenn wir mit $\boldsymbol{n}_0$ den Einheitsvektor in Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens m_1 nach dem Stoß bezeichnen, so werden die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen nach dem Stoß (wir kennzeichnen sie durch einen Strich):

$$\boldsymbol{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\,v\,\boldsymbol{n}_0\,, \qquad \boldsymbol{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\,v\,\boldsymbol{n}_0\,. \tag{14,1}$$

Um zum Laborsystem zurückzukehren, muß man zu diesen Geschwindigkeiten die Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ des Schwerpunktes hinzufügen. Für die Geschwin-

digkeiten der Teilchen im L-System nach dem Stoß gilt daher

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1' &= \frac{m_2}{m_1+m_2} v\, \boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2} \boldsymbol{v}\,, \\ \boldsymbol{v}_2' &= -\frac{m_1}{m_1+m_2} v\, \boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2} \boldsymbol{v}\,. \end{aligned} \tag{14,2}$$

Damit sind die Aussagen erschöpft, die man, nur von den Erhaltungssätzen ausgehend, über den Stoß bekommen kann. Die Richtung des Vektors $\boldsymbol{n}_0$ hängt vom Wechselwirkungsgesetz der Teilchen und von ihrer gegenseitigen Lage beim Stoß ab.

Die Gleichung (14,2) kann man geometrisch interpretieren; hierbei ist es zweckmäßig, von den Geschwindigkeiten zu den Impulsen überzugehen. Nach Multiplikation der Gleichungen (14,2) mit m_1 bzw. m_2 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_1' &= m\, v\, \boldsymbol{n}_0 + \frac{m_1}{m_1+m_2} \boldsymbol{p}_1\,, \\ \boldsymbol{p}_2' &= -\, m\, v\, \boldsymbol{n}_0 + \frac{m_2}{m_1+m_2} \boldsymbol{p}_1 \end{aligned} \tag{14,3}$$

$(m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ ist die reduzierte Masse$)$. Wir schlagen dann einen Kreis mit dem Radius $m\,v$ und führen die in Abb. 11 gezeigte Konstruktion durch.

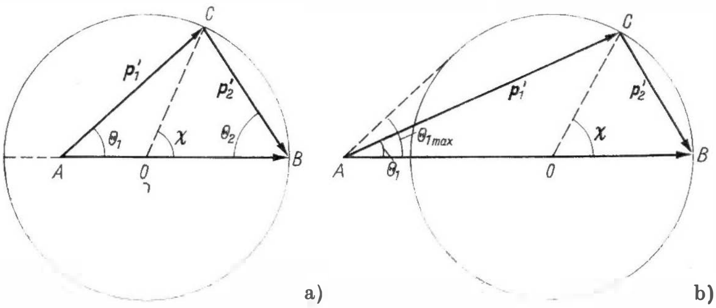


Abb. 11 a) b)

Wenn der Einheitsvektor $\boldsymbol{n}_0$ längs $\overrightarrow{OC}$ gerichtet ist, so liefern die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{CB}$ die Impulse $\boldsymbol{p}_1'$ und $\boldsymbol{p}_2'$. Bei vorgegebenem $\boldsymbol{p}_1$ liegen der Radius des Kreises sowie die Lage des Punktes A fest, und der Punkt C kann eine beliebige Lage auf dem Kreis einnehmen. Der Punkt A liegt für $m_1 < m_2$ (Abb. 11a) innerhalb des Kreises und für $m_1 > m_2$ (Abb. 11b) außerhalb des Kreises.

Die in den Zeichnungen mit Θ_1 und Θ_2 bezeichneten Winkel sind die Ablenkwinkel der Teilchen nach dem Stoß bezüglich der Stoßrichtung (der Richtung von $\boldsymbol{p}_1$). Der Winkel χ (er gibt die Richtung von $\boldsymbol{n}_0$ an) bedeutet den Ablenkwinkel des ersten Teilchens im Schwerpunktsystem. Aus der Abbildung liest man ab, daß die Winkel Θ_1 und Θ_2 durch den Winkel χ folgendermaßen ausgedrückt werden können:

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2 \cos\chi}\,, \qquad \Theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}\,. \tag{14,4}$$

Wir geben noch die Formeln für die Beträge der Geschwindigkeiten beider Teilchen nach dem Stoß in Abhängigkeit vom Winkel χ an:

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_1 m_2 \cos\chi}}{m_1 + m_2}\, v\,, \qquad v_2' = \frac{2\, m_1 v}{m_1 + m_2} \sin\frac{\chi}{2}. \tag{14,5}$$

Die Summe $\Theta_1 + \Theta_2$ ist der Winkel zwischen den Teilchen nach dem Stoß. Offenbar gilt $\Theta_1 + \Theta_2 > \frac{\pi}{2}$ bei $m_1 < m_2$ und $\Theta_1 + \Theta_2 < \frac{\pi}{2}$ bei $m_1 > m_2$.

Dem Falle, daß beide Teilchen sich nach dem Stoß auf einer Geraden bewegen (*zentraler Stoß*), entspricht $\chi = \pi$, d. h., der Punkt C liegt auf dem Durchmesser entweder links vom Punkt A (Abb. 11a; hierbei sind $\boldsymbol{p}_1'$ und $\boldsymbol{p}_2'$ entgegengesetzt gerichtet) oder zwischen A und 0 (Abb. 11b; hierbei sind $\boldsymbol{p}_1'$ und $\boldsymbol{p}_2'$ gleichgerichtet).
Die Geschwindigkeiten der Teilchen nach dem Stoß sind in diesem Falle

$$\boldsymbol{v}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, \boldsymbol{v}\,, \qquad \boldsymbol{v}_2' = \frac{2\, m_1}{m_1 + m_2}\, \boldsymbol{v}\,. \tag{14,6}$$

Der Betrag von $\boldsymbol{v}_2'$ ist hierbei der maximal mögliche; infolgedessen ergibt sich für die größte Energie, die das zunächst ruhende Teilchen bei dem Stoß erhalten kann, der Ausdruck

$$E'_{2\,\max} = \frac{m_2 v'^2_{2\,\max}}{2} = \frac{4\, m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\, E_1\,, \tag{14,7}$$

wo $E_1 = m_1 v_1^2/2$ die Anfangsenergie des stoßenden Teilchens bedeutet.

Bei $m_1 < m_2$ kann die Geschwindigkeit des ersten Teilchens nach dem Stoß jede beliebige Richtung haben. Bei $m_1 > m_2$ dagegen kann der Ablenkwinkel des stoßenden Teilchens einen Maximalwert nicht überschreiten; im zugehörigen Punkt C (Abb. 11b) berührt die Gerade AC den Kreis. Offenbar gilt $\sin\Theta_{1\,\max} = OC/OA$ oder

$$\sin\Theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}\,. \tag{14,8}$$

Der Stoß wird besonders einfach für Teilchen gleicher Masse (von denen das eine zunächst ruht). In diesem Falle liegt nicht nur der Punkt B, sondern auch der Punkt A auf dem Kreis (Abb. 12). Hierbei gilt

$$\Theta_1 = \frac{\chi}{2}\,, \qquad \Theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2}\,, \tag{14,9}$$

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2}\,, \qquad v_2' = v\sin\frac{\chi}{2}\,. \tag{14,10}$$

Es sei bemerkt, daß die Teilchen nach dem Stoß unter einem rechten Winkel auseinanderfliegen.

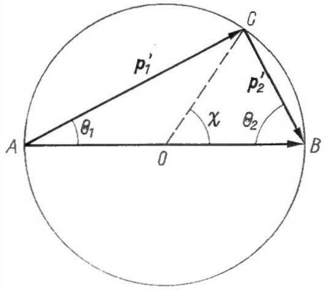


Abb. 12

§ 15. Streuung von Teilchen

Im vorigen Paragraphen war erwähnt worden, daß zur vollständigen Bestimmung des Resultates eines Stoßes zweier Teilchen (Berechnung des Winkels χ) die Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung des konkreten Wechselwirkungsgesetzes zwischen den Teilchen gelöst werden müssen.

Wir werden zunächst — wie es üblich ist — das äquivalente Problem der Ablenkung eines einzigen Teilchens mit der Masse m im Feld $U(r)$ eines festen Kraftzentrums (das im Schwerpunkt der Teilchen liegt) betrachten.

Die Bahn eines Teilchens im Zentralfeld verläuft symmetrisch zu der Geraden, die das Zentrum mit dem ihm nächstgelegenen Bahnpunkt verbindet (OA in Abb. 13). Infolgedessen schneiden die beiden Asymptoten der Bahn die er-

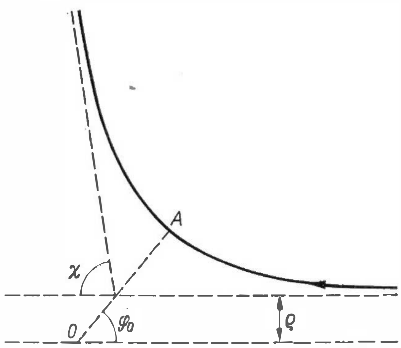


Abb. 13

wähnte Gerade unter dem gleichen Winkel. Wenn wir diesen mit φ_0 bezeichnen, so ergibt sich für den Winkel χ, um den das Teilchen auf seinem Fluge am Zentrum vorbei abgelenkt wird, der Wert

$$\chi = |\pi - 2\,\varphi_0|\ , \tag{15,1}$$

wie aus der Abbildung zu ersehen ist. Der Winkel φ_0 berechnet sich gemäß (12,7) aus dem Integral

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,\mathrm{d}r}{\sqrt{2\,m\,[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}}\,, \tag{15,2}$$

wobei von dem dem Zentrum nächstgelegenen bis zu einem unendlich weit entfernten Bahnpunkt integriert wird. Wir erinnern daran, daß $r_{\min}$ eine Wurzel des Radikanden in (15,2) ist.

Bei infiniter Bewegung, mit der wir es hier zu tun haben, ist es zweckmäßig, statt der Konstanten E und M andere einzuführen: die Geschwindigkeit v_∞ des Teilchens im Unendlichen und den sogenannten *Stoßparameter* ϱ. Letzterer stellt die Länge des Lotes dar, das vom Zentrum auf die Richtung von v_∞ gefällt wird, d. h., er ist der Abstand, in dem das Teilchen am Zentrum vorbeifliegen würde, wenn das Kraftfeld nicht vorhanden wäre (Abb. 13). Die Energie und den Drehimpuls kann man durch diese Größen folgendermaßen ausdrücken:

$$E = \frac{m\,v_\infty^2}{2}\,, \qquad M = m\,\varrho\,v_\infty\,, \tag{15,3}$$

und Formel (15,2) nimmt die Form

$$\varphi_0 = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\varrho\,\frac{\mathrm{d}r}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{r^2} - \frac{2\,U}{m\,v_\infty^2}}} \tag{15,4}$$

an. Daraus ergibt sich zusammen mit (15,1) der Zusammenhang zwischen χ und ϱ.

In physikalischen Anwendungen hat man es im allgemeinen nicht mit der Ablenkung eines einzigen Teilchens zu tun, sondern, wie man sagt, mit der *Streuung* eines ganzen Strahles gleichartiger Teilchen, die mit gleicher Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\infty$ auf das Streuzentrum zulaufen. Verschiedene Teilchen des Strahles haben verschiedene Stoßparameter und werden dementsprechend unter verschiedenen Winkeln χ gestreut. Wir bezeichnen mit $\mathrm{d}N$ die Anzahl der Teilchen, die in der Zeiteinheit um Winkel gestreut werden, die in dem Intervall zwischen χ und $\chi + \mathrm{d}\chi$ liegen. Diese Zahl selbst ist für die Charakterisierung des Streuprozesses unbequem, weil sie von der Dichte des einfallenden Strahles abhängt (ihr proportional ist). Aus diesem Grunde führen wir das Verhältnis

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{n} \tag{15,5}$$

ein, worin n die Anzahl der Teilchen ist, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit des Strahlquerschnittes hindurchtreten (wir nehmen natürlich an, daß

der Strahl über seinen gesamten Querschnitt homogen ist). Dieses Verhältnis hat die Dimension einer Fläche und heißt *Wirkungsquerschnitt der Streuung*. Er ist durch die Form des Streufeldes vollständig bestimmt und stellt eine für die Beschreibung des Streuprozesses sehr wichtige Größe dar.

Wir nehmen an, daß die Beziehung zwischen χ und ϱ eindeutig ist; das trifft zu, wenn der Streuwinkel eine monoton abnehmende Funktion des Stoßparameters ist. In diesem Falle werden nur diejenigen Teilchen in ein gegebenes Winkelintervall zwischen χ und $\chi + \mathrm{d}\chi$ gestreut, deren Stoßparameter in einem bestimmten Intervall, zwischen $\varrho(\chi)$ und $\varrho(\chi) + \mathrm{d}\varrho(\chi)$ liegen. Die Anzahl dieser Teilchen ist gleich dem Produkt von n mit dem Flächeninhalt des Ringes zwischen den Kreisen mit den Radien ϱ und $\varrho + \mathrm{d}\varrho$, d. h., es gilt $\mathrm{d}N = 2\pi\varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot n$. Damit wird der Wirkungsquerschnitt

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,. \tag{15,6}$$

Um die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts vom Streuwinkel zu finden, genügt es, diesen Ausdruck in die Form

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\varrho(\chi)\left|\frac{\mathrm{d}\varrho(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}\chi \tag{15,7}$$

umzuschreiben. Hier steht der Absolutwert der Ableitung $\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}\chi$, weil diese negative Werte annehmen kann (das sogar in der Regel tut). Oft bezieht man $\mathrm{d}\sigma$ nicht auf das Element $\mathrm{d}\chi$ des ebenen Winkels, sondern auf das Raumwinkelelement $\mathrm{d}o$. Der Raumwinkel zwischen zwei Kegeln mit den Scheitelwinkeln χ und $\chi + \mathrm{d}\chi$ ist $\mathrm{d}o = 2\pi\sin\chi\,\mathrm{d}\chi$. Damit erhalten wir aus (15,7):

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\varrho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\chi}\right|\mathrm{d}o\,. \tag{15,8}$$

Wir kehren nun zu der in der Praxis vorliegenden Situation zurück, nämlich daß der Teilchenstrahl nicht an einem festen Kraftfeld, sondern an anderen, zunächst ruhenden Teilchen gestreut wird. Die Formel (15,7) läßt sich auch hier verwenden; sie liefert nämlich den Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit vom Streuwinkel im Schwerpunktsystem. Um die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes vom Streuwinkel Θ im Laborsystem zu finden, muß man in (15,7) χ durch Θ gemäß Formel (14,4) ausdrücken. Hierbei ergeben sich Ausdrücke für den Wirkungsquerschnitt sowohl bezüglich des einfallenden Teilchenstrahls (χ ausgedrückt durch Θ_1), als auch bezüglich der zunächst ruhenden Teilchen (χ durch Θ_2 ausgedrückt).

Aufgaben

1. Berechne den Wirkungsquerschnitt für die Streuung von Teilchen an einer absolut harten Kugel vom Radius a (d. h. für das Wechselwirkungsgesetz: $U = \infty$ bei $r < a$ und $U = 0$ bei $r > a$).

Lösung: Da sich das Teilchen außerhalb der Kugel frei bewegt, aber nicht in sie eindringen kann, setzt sich die Bahn aus zwei Geraden zusammen, die symmetrisch zu dem

Radius verlaufen, der zum Berührungspunkt des Teilchens mit der Kugel führt (Abb. 14). Aus der Abbildung folgt

$$\varrho = a \sin \varphi_0 = a \sin \frac{\pi - \chi}{2} = a \cos \frac{\chi}{2} .$$

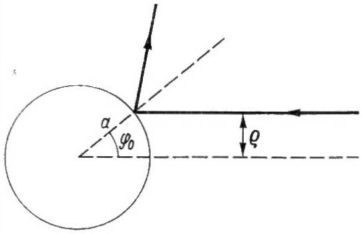


Abb. 14

Einsetzen in (15,7) bzw. (15,8) liefert

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{2} \sin \chi \, d\chi = \frac{a^2}{4} \, do , \tag{1}$$

d. h., im Schwerpunktsystem ist die Streuung isotrop. Integration von $d\sigma$ über alle Winkel ergibt für den totalen Wirkungsquerschnitt den Wert $\sigma = \pi a^2$ in Übereinstimmung damit, daß die Zielfläche, die das Teilchen treffen muß, um überhaupt gestreut zu werden, der Querschnitt der Kugel ist.

2. Drücke für denselben Fall den Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie ε aus, die die gestreuten Teilchen verlieren.

Lösung: Die Energie, die das Teilchem m_1 verliert, ist gleich der Energie, die das Teilchen m_2 gewinnt. Gemäß (14,5) und (14,7) ist

$$\varepsilon = E_2' = \frac{2 m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} v_\infty^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} = \varepsilon_{max} \sin^2 \frac{\chi}{2} ,$$

woraus sich

$$d\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{max} \sin \chi \, d\chi$$

ergibt, und nach Einsetzen in Formel (1) der Aufgabe 1 erhalten wir

$$d\sigma = \pi a^2 \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_{max}} .$$

Die Verteilung der ε-Werte der gestreuten Teilchen ist gleichmäßig im gesamten ε-Intervall von Null bis ε_{max}.

3. Berechne den Wirkungsquerschnitt dafür, daß Teilchen (der Masse m_1) auf die Oberfläche einer Kugel (mit der Masse m_2 und dem Radius R) fallen, von der sie nach dem NEWTONschen Gesetz angezogen werden.

Lösung: Die Bedingung dafür. daß die Teilchen auf die Kugel fallen, ist die Erfüllung der Ungleichung $r_{min} < R$, wo r_{min} der dem Kugelmittelpunkt nächstgelegene Bahnpunkt des Teilchens ist. Der größte zulässige Wert von ϱ bestimmt sich aus der Gleichung $r_{min} = R$, was zur Lösung der Gleichung $U_{eff}(R) = E$ oder

$$\frac{m_1 v_\infty^2 \varrho_{max}^2}{2 R^2} - \frac{\alpha}{R} = \frac{m_1 v_\infty^2}{2}$$

führt, wobei $\alpha = \gamma m_1 m_2$ ist (γ bezeichnet die Gravitationskonstante) und wir $m \approx m_1$ gesetzt haben unter der Annahme, daß $m_2 \gg m_1$ gilt. Indem wir hieraus ϱ_{max}^2 entnehmen,

erhalten wir

$$\sigma = \pi R^2 \left(1 + \frac{2\gamma m_2}{R v_\infty^2}\right).$$

Bei $v_\infty \to \infty$ strebt der Wirkungsquerschnitt natürlich dem geometrischen Querschnitt der Kugel zu.

§ 16. Die Rutherfordsche Formel

Eine der wichtigsten Anwendungen der oben erhaltenen Formeln ist die Streuung geladener Teilchen im Coulomb-Feld.

Wenn wir in (15,4) $U = \frac{a}{r}$ setzen und elementar integrieren, erhalten wir

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\frac{\alpha}{m v_\infty^2 \varrho}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2 \varrho}\right)^2}},$$

daraus ergibt sich

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{tg}^2 \varphi_0$$

oder nach Einführung von $\varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}$ gemäß (15,1)

$$\varrho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \operatorname{ctg}^2 \frac{\chi}{2}. \tag{16,1}$$

Differentiation dieses Ausdruckes nach χ und Einsetzen in (15,7) oder (15,8) liefert

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos \frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi \tag{16,2}$$

bzw.

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{2 m v_\infty^2}\right)^2 \frac{do}{\sin^4 \frac{\chi}{2}}. \tag{16,3}$$

Dies ist die sogenannte Rutherford-*Formel.* Es sei erwähnt, daß der Wirkungsquerschnitt nicht vom Vorzeichen von α abhängt, so daß das erhaltene Resultat sowohl für abstoßende als auch für anziehende Coulomb-Felder gilt.

Formel (16,3) liefert den Wirkungsquerschnitt in dem Bezugssystem, in dem der Schwerpunkt der zusammenstoßenden Teilchen ruht. Die Transformation ins Laborsystem wird mit Hilfe der Formeln (14,4) durchgeführt. Für die zunächst ruhenden Teilchen ergibt Einsetzen von $\chi = \pi - 2\,\Theta_2$ in (16,2)

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin \Theta_2}{\cos^3 \Theta_2} d\Theta_2 = \left(\frac{\alpha}{m v_\infty^2}\right)^2 \frac{do_2}{\cos^3 \Theta_2}. \tag{16,4}$$

Für die einfallenden Teilchen führt die Transformation im allgemeinen Falle zu äußerst umständlichen Formeln. Wir erwähnen daher nur zwei spezielle Fälle.

Wenn die Masse m_2 des streuenden Teilchens groß ist im Vergleich zur Masse m_1 des gestreuten Teilchens, so ist $\chi \approx \Theta_1$ und $m \approx m_1$, so daß sich

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{4\,E_1}\right)^2 \frac{do_1}{\sin^4 \frac{\Theta_1}{2}} \tag{16,5}$$

ergibt, worin $E_1 = m_1 v_\infty^2/2$ die Energie des einfallenden Teilchens ist.

Wenn die Massen beider Teilchen gleich sind ($m_1 = m_2$, $m = m_1/2$), so wird $\chi = 2\,\Theta_1$ nach (14,9), und durch Einsetzen in (16,2) entsteht

$$d\sigma_1 = 2\,\pi \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\Theta_1}{\sin^3\Theta_1}\, d\Theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\Theta_1}{\sin^4\Theta_1}\, do_1 \,. \tag{16,6}$$

Wenn nicht nur die Massen beider Teilchen gleich, sondern diese Teilchen überhaupt identisch sind, so hat es keinen Sinn, nach der Streuung die zuerst bewegten von den zuerst ruhenden Teilchen zu unterscheiden. Der Gesamtwirkungsquerschnitt für alle Teilchen ergibt sich dann durch Summation von $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ und nach Ersetzen von Θ_1 und Θ_2 durch den gemeinsamen Wert Θ zu

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\Theta} + \frac{1}{\cos^4\Theta}\right) \cos\Theta\, do \,. \tag{16,7}$$

Wir kehren nun wieder zu der allgemeinen Formel (16,2) zurück und berechnen mit ihrer Hilfe die Verteilung der gestreuten Teilchen in bezug auf die beim Stoß abgegebene Energie. Bei beliebigem Verhältnis zwischen den Massen des gestreuten Teilchens (m_1) und des streuenden Teilchens (m_2) gilt für die Geschwindigkeit, die letzteres erhält, als Funktion des Streuwinkels im Schwerpunktsystem die Formel (14,5), also

$$v_2' = \frac{2\,m_1}{m_1 + m_2}\, v_\infty \sin\frac{\chi}{2} \,.$$

Daraus folgt für die Energie, die das Teilchen m_2 erhält und die das Teilchen m_1 also verliert, der Wert

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2\,m^2}{m^2}\, v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2} \,.$$

Wenn wir hiernach $\sin\frac{\chi}{2}$ durch ε ausdrücken und in (16,2) einsetzen, erhalten wir

$$d\sigma = 2\,\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \,. \tag{16,8}$$

Diese Formel beantwortet die gestellte Frage: Sie bestimmt den Wirkungsquerschnitt als Funktion des Energieverlustes ε; letzterer nimmt hierbei sämtliche Werte von Null bis $\varepsilon_{\max} = 2\,m^2 \frac{v_\infty^2}{m_2}$ an.

Kleine Schwingungen

V

§ 17. Freie eindimensionale Schwingungen

Ein sehr verbreiteter Bewegungstyp mechanischer Systeme sind die sogenannten *kleinen Schwingungen*, die ein System um seinen stabilen Gleichgewichtszustand herum ausführt. Wir beginnen die Betrachtung solcher Bewegungen mit dem einfachsten Fall, daß nämlich das System nur einen einzigen Freiheitsgrad besitzt.

Im stabilen Gleichgewicht hat das System eine Lage, in der die potentielle Energie $U(q)$ ein Minimum besitzt; eine Auslenkung aus dieser Lage führt zum Auftreten einer Kraft $-\mathrm{d}U/\mathrm{d}q$, die das System in die Ausgangslage zurückzieht. Wir bezeichnen den zum Minimum von U gehörenden Wert der verallgemeinerten Koordinate q mit q_0. Bei kleinen Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage genügt es, bei der Entwicklung der Differenz $U(q) - U(q_0)$ nach Potenzen von $q - q_0$ nur das erste nicht verschwindende Glied zu berücksichtigen. Das ist im allgemeinen das Glied zweiter Ordnung:

$$U(q) - U(q_0) \approx \frac{k}{2} (q - q_0)^2 ,$$

k ist ein positiver Koeffizient (und gleich der zweiten Ableitung $U''(q)$ an der Stelle $q = q_0$). Im folgenden normieren wir die potentielle Energie derart, daß $U(q_0) = 0$ wird, und führen die Bezeichnung

$$x = q - q_0 \tag{17,1}$$

für die Auslenkung der Koordinate von ihrem Gleichgewichtswert ein. Damit wird

$$U(x) = \frac{k\,x^2}{2} . \tag{17,2}$$

Die kinetische Energie des Systems mit einem Freiheitsgrad hat im allgemeinen Falle die Form

$$\frac{1}{2} a(q)\,\dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q)\,\dot{x}^2 .$$

In der betrachteten Näherung genügt es, die Funktion $a(q)$ einfach durch ihren Wert an der Stelle $q = q_0$ zu ersetzen. Wenn wir der Kürze halber die Bezeichnung[1])

$$a(q_0) = m$$

[1]) Es sei jedoch betont, daß die Größe m nur dann mit der Masse zusammenfällt, wenn x die kartesische Koordinate des Teilchens ist!

einführen, erhalten wir schließlich für die LAGRANGE-Funktion eines Systems, das eindimensionale kleine Schwingungen ausführt[1]), den Ausdruck

$$L = \frac{m\,\dot{x}^2}{2} - \frac{k\,x^2}{2}\,. \tag{17,3}$$

Die dieser Funktion entsprechende Bewegungsgleichung lautet

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0 \tag{17,4}$$

oder

$$\ddot{x} + \omega^2\,x = 0\,, \tag{17,5}$$

wo die Bezeichnung

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{17,6}$$

verwendet worden ist. Die lineare Differentialgleichung (17,5) hat die beiden unabhängigen Lösungen $\cos\omega\,t$ und $\sin\omega\,t$, so daß die allgemeine Lösung

$$x = c_1 \cos\omega\,t + c_2 \sin\omega\,t \tag{17,7}$$

heißt. Dieser Ausdruck kann auch in der Form

$$x = a\cos(\omega\,t + \alpha) \tag{17,8}$$

geschrieben werden. Da $\cos(\omega\,t + \alpha) = \cos\omega\,t\,\cos\alpha - \sin\omega\,t\,\sin\alpha$ ist, zeigt der Vergleich mit (17,7), daß die freien Konstanten a und α mit den Konstanten c_1 und c_2 durch die Beziehung

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{c_2}{c_1} \tag{17,9}$$

verknüpft sind.

Das bedeutet, daß das System harmonische Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführt. Der Koeffizient a vor dem periodischen Faktor in (17,8) heißt *Amplitude* und das Argument des Kosinus *Phase* der Schwingung; α ist die Anfangsphase; sie hängt offenbar von der Wahl des Zeitnullpunktes ab. Die Größe ω heißt *Kreisfrequenz* der Schwingung; in der theoretischen Physik wird sie übrigens gewöhnlich einfach mit *Frequenz* bezeichnet, was wir im folgenden auch tun werden.

Die Frequenz ist das fundamentale Charakteristikum von Schwingungen; sie hängt nicht von den Anfangsbedingungen der Bewegung ab, sondern ist nach Formel (17,6) vollständig durch die Eigenschaften des mechanischen Systems bestimmt. Es sei aber betont, daß diese Eigenschaft der Frequenz an die Voraussetzung gebunden ist, daß die Schwingungen kleine Amplitude haben, sie geht verloren beim Übergang zu höheren Näherungen. In mathematischer Hin-

[1]) Ein solches System wird oft eindimensionaler *Oszillator* genannt.

sicht hängt diese Eigenschaft mit der quadratischen Abhängigkeit der potentiellen Energie von der Koordinate zusammen.

Die Energie eines Systems, das kleine Schwingungen ausführt, ist

$$E = \frac{m\,\dot{x}^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

oder, nach Einsetzen von (17,8),

$$E = \frac{1}{2}\,m\,\omega^2 a^2\,. \tag{17,10}$$

Sie ist dem Quadrat der Schwingungsamplitude proportional.

Oft erweist es sich als zweckmäßig, die Abhängigkeit der Koordinate des schwingenden Systems von der Zeit als Realteil des komplexen Ausdruckes

$$x = \mathrm{Re}\,\{A\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}\} \tag{17,11}$$

darzustellen, worin A eine komplexe Konstante ist; wenn wir sie in der Form

$$A = a\,e^{-i\alpha} \tag{17,12}$$

schreiben, so kehren wir zu dem Ausdruck (17,8) zurück. Die Konstante A heißt *komplexe Amplitude*; ihr Betrag ist gleich der gewöhnlichen Amplitude, ihr Argument gleich der Anfangsphase.

Der Umgang mit Exponentialfunktionen ist in mathematischer Hinsicht einfacher als der mit trigonometrischen Funktionen, da Differentiation ihre Form nicht ändert. Solange man nur lineare Operationen durchführt (Addition, Multiplikation mit einem konstanten Koeffizienten, Differentiation, Integration), kann man das Zeichen *Re* (Realteil von) fortlassen und erst im Endresultat berücksichtigen.

Aufgaben

1. Drücke die Amplitude und Anfangsphase von Schwingungen durch die Anfangswerte der Koordinate (x_0) und der Geschwindigkeit (v_0) aus.

Lösung:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{v_0}{\omega\,x_0}\,.$$

2. Bestimme das Verhältnis der Frequenzen ω und ω' der Schwingungen zweiatomiger Moleküle, die aus Atomen verschiedener Isotope bestehen; die Massen der Atome sind m_1, m_2 bzw. m_1', m_2'.

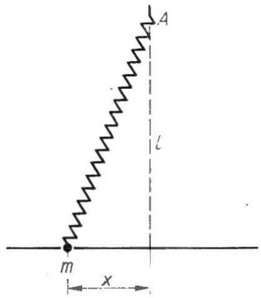
Lösung: Da die Wechselwirkung zwischen den Atomen der Isotope die gleiche ist, gilt $k = k'$. Als Koeffizienten m in den kinetischen Energien der Moleküle sind hier ihre reduzierten Massen zu nehmen. Aus (17,6) finden wir damit

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{m_1\,m_2\,(m_1' + m_2')}{m_1'\,m_2'\,(m_1 + m_2)}}\,.$$

3. Bestimme die Schwingungsfrequenz eines Punktes mit der Masse m, der sich längs einer Geraden bewegen kann und an einer Feder hängt, deren anderes Ende im Punkte A

(Abb. 15) befestigt ist; der Punkt A befindet sich im Abstand l von der Geraden. Die Feder hat die Länge l, an ihr tritt die Kraft F auf.

Abb. 15



Lösung: Die potentielle Energie der Feder ist (bis auf kleine Größen höherer Ordnung) gleich dem Produkt aus der Kraft F und der Längenänderung δl der Feder. Für $x \ll l$ gilt

$$\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx \frac{x^2}{2\,l},$$

so daß $U = F\,x^2/2\,l$ wird. Da die kinetische Energie gleich $m\,\dot{x}^2/2$ ist, ergibt sich

$$\omega = \sqrt{\frac{F}{m\,l}}\,.$$

§ 18. Erzwungene Schwingungen

Wir gehen nun zur Betrachtung von Schwingungen eines Systems über, auf das ein äußeres veränderliches Feld wirkt. Derartige Schwingungen heißen *erzwungene* Schwingungen im Unterschied zu den im vorhergehenden Paragraphen untersuchten sogenannten *freien* Schwingungen. Da die Amplitude weiterhin als klein vorausgesetzt wird, muß das äußere Feld genügend schwach sein, damit es nicht zu große x-Auslenkungen hervorruft.

In diesem Falle besitzt das System neben der eigenen potentiellen Energie $\frac{1}{2}\,k\,x^2$ noch die potentielle Energie $U_e(x, t)$, die von der Wirkung des äußeren Feldes herrührt. Wenn wir dieses Zusatzglied in eine Reihe nach Potenzen der kleinen Größe x entwickeln, erhalten wir

$$U_e(x, t) \approx U_e(0, t) + x \left.\frac{\partial U_e}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Das erste Glied hängt nur von der Zeit ab und kann deswegen in der LAGRANGE-Funktion fortgelassen werden (als totale zeitliche Ableitung einer anderen Funktion der Zeit). Im zweiten Glied ist $-\,\partial U_e/\partial x$ die äußere „Kraft“, die auf das System in der Gleichgewichtslage wirkt und eine vorgegebene Funktion der Zeit ist; wir bezeichnen sie mit $F(t)$. Damit erscheint in der potentiellen Energie

das Glied $- x\, F(t)$, so daß die LAGRANGE-Funktion des Systems lautet:

$$L = \frac{m\,\dot{x}^2}{2} - \frac{k\,x^2}{2} + x\,F(t)\,. \tag{18,1}$$

Die entsprechende Bewegungsgleichung ist

$$m\,\ddot{x} + k\,x = F(t)$$

oder

$$\ddot{x} + \omega^2\,x + = \frac{1}{m}\,F(t)\,, \tag{18,2}$$

wo wir wiederum die Frequenz ω der freien Schwingungen eingeführt haben.

Bekanntlich erhält man die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten als Summe zweier Ausdrücke: $x = x_0 + x_1$, wo x_0 die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und x_1 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung bedeuten. In unserem Falle stellt x_0 die im vorherigen Paragraphen untersuchten freien Schwingungen dar.

Wir betrachten nun einen Fall von besonderem Interesse, wo nämlich die äußere Kraft ebenfalls eine einfache periodische Funktion der Zeit mit der Frequenz γ ist:

$$F(t) = f\cos(\gamma\,t + \beta)\,. \tag{18,3}$$

Wir suchen eine partikuläre Lösung der Gleichung (18,2) in der Form $x_1 = b\cos(\gamma\,t + \beta)$, also mit dem gleichen periodischen Faktor. Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt $b = f/m\,(\omega^2 - \gamma^2)$; Hinzufügen der Lösung der homogenen Gleichung liefert die allgemeine Lösung in der Gestalt

$$x = a\cos(\omega\,t + \alpha) + \frac{f}{m\,(\omega^2 - \gamma^2)}\cos(\gamma\,t + \beta)\,. \tag{18,4}$$

Die freien Konstanten a und α bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.

Das bedeutet, daß das System unter der Wirkung äußerer periodischer Kräfte eine Bewegung ausführt, die sich aus zwei Schwingungen zusammensetzt: aus einer Schwingung mit der Eigenfrequenz ω des Systems und aus einer Schwingung mit der Frequenz γ der äußeren Kraft.

Die Lösung (18,4) gilt nicht im Falle der sogenannten *Resonanz*, d. h. wenn die Frequenz der äußeren Kraft mit der Eigenfrequenz des Systems zusammenfällt. Um die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung in diesem Falle zu finden schreiben wir den Ausdruck (18,4) mit entsprechenden neuen Bezeichnungen der Konstanten in der Form

$$x = a\cos(\omega\,t + \alpha) + \frac{f}{m\,(\omega^2 - \gamma^2)}\left[\cos(\gamma\,t + \beta) - \cos(\omega\,t + \beta)\right].$$

Für $\gamma \to \omega$ liefert das zweite Glied eine Unbestimmtheit der Art 0/0, und durch

Anwendung der L'HOSPITALschen Regel erhalten wir

$$x = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta)\,. \tag{18,5}$$

Das bedeutet, daß im Falle der Resonanz die Schwingungsamplitude linear mit der Zeit wächst (solange sie nicht so groß wird, daß man die gesamte dargelegte Theorie nicht mehr anwenden kann).

Wir wollen noch klären, wie kleine Schwingungen in der Nähe der Resonanz aussehen, wenn also $\gamma = \omega + \varepsilon$ mit kleinem ε gilt. In komplexer Schreibweise lautet die allgemeine Lösung

$$x = A\,\mathrm{e}^{-i\omega t} + B\,\mathrm{e}^{-i(\omega+\varepsilon)t} = (A + B\,\mathrm{e}^{-i\varepsilon t})\,\mathrm{e}^{-\varepsilon\omega t}\,. \tag{18,6}$$

Da sich die Größe $A + B\,\mathrm{e}^{-i\varepsilon t}$ während einer Periode $2\pi/\omega$ des Faktors $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ wenig ändert, können wir die Bewegung in der Nähe der Resonanz als kleine Schwingung mit veränderlicher Amplitude betrachten

Wenn wir diese Amplitude mit c bezeichnen, erhalten wir

$$\mathrm{c} = |A + B\,e^{-i\varepsilon t}|\,.$$

Wir drücken nun A bzw. B durch $a\,\mathrm{e}^{-i\alpha}$ bzw. $b\,\mathrm{e}^{-i\beta}$ aus und finden

$$\mathrm{c}^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos(\varepsilon t + \beta - \alpha)\,. \tag{18,7}$$

Die Amplitude schwankt demnach periodisch mit der Frequenz ε zwischen den beiden Grenzen

$$|a - b| \leqq c \leqq a + b\,.$$

Diese Erscheinung heißt *Schwebung*.

Die Bewegungsgleichung (18,2) kann auch bei beliebiger äußerer Kraft $F(t)$ in allgemeiner Form integriert werden. Das ist leicht auszuführen, wenn man die Gleichung zunächst in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x} - i\omega x) + i\omega(\dot{x} - i\omega x) = \frac{1}{m} F(t)$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + i\omega\xi = \frac{1}{m} F(t) \tag{18,8}$$

schreibt, wo die komplexe Größe

$$\xi = \dot{x} - i\omega x \tag{18,9}$$

eingeführt worden ist. Die Gleichung (18,8) ist nicht mehr von zweiter, sondern nur noch von erster Ordnung. Ohne die rechte Seite wäre die Lösung $\xi = A\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ mit konstantem A. Nach allgemeinen Regeln suchen wir eine Lösung der inhomogenen Gleichung in der Form $\xi = A(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$ und erhalten für die Funktion $A(t)$ die Gleichung

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m} F(t)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,.$$

Ihre Integration ergibt die Lösung der Gleichung (18,8) in der Form

$$\xi = e^{-i\omega t}\left\{\int_0^t \frac{1}{m} F(t)\, e^{+i\omega t}\, dt + \xi_0\right\}, \tag{18,10}$$

hierin ist die Integrationskonstante ξ_0 so gewählt, daß sie den Wert von ξ im Zeitpunkt $t = 0$ darstellt. Das ist die gesuchte allgemeine Lösung; die Funktion $x(t)$ ergibt sich als Imaginärteil des Ausdrucks (18,10) (geteilt durch $-\omega$).[1]

Die Energie eines Systems, das erzwungene Schwingungen ausführt, bleibt selbstverständlich nicht erhalten; dem System wird durch die äußere Kraft Energie zugeführt. Wir wollen die Gesamtenergie bestimmen, die dem System während der ganzen Zeit zufließt, in der die Kraft wirkt (von $-\infty$ bis $+\infty$), wobei wir annehmen, daß die Anfangsenergie gleich Null ist. Aus Formel (18,10) (mit der unteren Integrationsgrenze $-\infty$ statt Null und mit $\xi(-\infty) = 0$) ergibt sich für $t \to \infty$

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{+i\omega t} dt\right|^2.$$

Andererseits ist die Energie des Systems

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2. \tag{18,11}$$

Wenn wir hier $|\xi(\infty)|^2$ einsetzen, erhalten wir für die gesuchte zugeführte Energie

$$E = \frac{1}{2m}\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{+i\omega t} dt\right|^2. \tag{18,12}$$

Sie ist demnach bestimmt durch das Absolutquadrat der zur Eigenfrequenz des Systems gehörenden Fourier-Komponente der Kraft $F(t)$.

Wenn die äußere Kraft nur während eines kurzen Zeitintervalls (das klein ist im Vergleich zu $1/\omega$) wirkt, kann man $e^{+i\omega t} \approx 1$ setzen und erhält

$$E = \frac{1}{2m}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt\right)^2.$$

Dieses Resultat ist von vornherein klar. Es drückt die Tatsache aus, daß eine kurzzeitig wirkende Kraft dem System den Impuls $\int F\, dt$ zuführt, ohne in dieser kurzen Zeit eine merkliche Verschiebung hervorzurufen.

Aufgaben

1. Berechne die erzwungenen Schwingungen eines Systems unter dem Einfluß einer äußeren Kraft $F(t)$, wenn das System zur Zeit $t = 0$ in der Gleichgewichtslage ruht ($x = 0$,

[1]) Dabei muß die Kraft $F(t)$ natürlich in reeller Form geschrieben werden.

$\dot{x} = 0$), für die Fälle

a) $F = \text{const} = F_0$.

Lösung: $x = \frac{F_0}{m\,\omega^2}(1 - \cos\omega\,t)$; die Wirkung einer konstanten Kraft besteht in einer Verschiebung der Gleichgewichtslage, um die herum die Schwingung verläuft.

b) $F = a\,t$.

Lösung: $x = \frac{a}{m\,\omega^3}(\omega\,t - \sin\omega\,t)$.

c) $F = F_0\,e^{-\alpha t}$.

Lösung: $x = \frac{F_0}{m\,(\omega^2 + \alpha^2)}\left(e^{-\alpha t} - \cos\omega\,t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega\,t\right)$.

d) $F = F_0\,e^{-\alpha t}\cos\beta\,t$.

Lösung:

$$x = \frac{F_0}{m\,[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\,\alpha^2\beta^2]}\Big\{-(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos\omega\,t + \frac{\alpha}{\omega}(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)\sin\omega\,t + e^{-\alpha t}[(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)\cos\beta\,t - 2\,\alpha\,\beta\sin\beta\,t]\Big\}$$

(bei der Lösung ist es zweckmäßig, die Kraft in der komplexen Form $F = F_0\,e^{(-\alpha - i\beta)t}$ zu schreiben).

2. Bestimme die Schwingungsamplitude eines Systems nach Einwirkung einer äußeren Kraft, die sich nach dem Gesetz $F = 0$ für $t < 0$, $F = F_0\,t/T$ für $0 < t < T$, $F = F_0$ für $t > T$ ändert (Abb. 16); bis zum Zeitpunkt $t = 0$ ruht das System in derGleichgewichtslage.

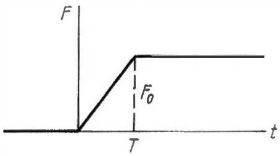


Abb. 16

Lösung: Während des Zeitintervalls $0 < t < T$ haben die Schwingungen, die den Anfangsbedingungen genügen, die Form

$$x = \frac{F_0}{m\,T\,\omega^3}(\omega\,t - \sin\omega\,t).$$

Für $t > T$ suchen wir eine Lösung der Form

$$x = c_1\cos\omega\,(t - T) + c_2\sin\omega\,(t - T) + \frac{F_0}{m\,\omega^2}.$$

Aus der Stetigkeitsbedingung für $\dot{x}$ und x an der Stelle $t = T$ finden wir

$$c_1 = -\frac{F_0}{m\,T\,\omega_0}\sin\omega\,T, \qquad c_2 = \frac{F_0}{m\,T\,\omega^3}(1 - \cos\omega\,T).$$

Hierbei ist die Amplitude der Schwingungen

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{2\,F_0}{m\,T\,\omega^3}\sin\frac{\omega\,T}{2}.$$

Wir bemerken, daß die Amplitude um so kleiner ist, je langsamer die Kraft F_0 „eingeschaltet" wird (d. h. je größer T ist).

3. Dasselbe für den Fall einer konstanten Kraft F_0, die während einer begrenzten Zeit T wirkt (Abb. 17).

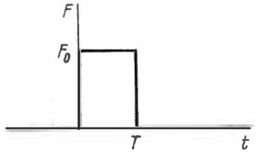


Abb. 17

Lösung: Man kann das Resultat auf dieselbe Weise wie in Aufgabe 2 finden; es ist jedoch noch einfacher, die Formel (18,10) zu benutzen. Für $t \gtrless T$ erhalten wir freie Schwingungen um die Lage $x = 0$; dabei ist

$$\xi = \frac{F_0}{m} e^{-i\omega t} \int_0^T e^{i\omega t}\, dt = \frac{i F_0}{\omega m}(1 - e^{i\omega t}) e^{-i\omega t};$$

das Absolutquadrat von ξ liefert die Amplitude gemäß der Formel $|\xi|^2 = a^2 \omega^2$. Als Resultat finden wir

$$a = \frac{2 F_0}{m\omega^2} \sin \frac{\omega T}{2}.$$

§ 19. Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden

Die Theorie der freien Schwingungen von Systemen mit mehreren (s) Freiheitsgraden baut sich ganz analog zu der Theorie auf, die wir in § 17 für eindimensionale Schwingungen betrachtet haben. Angenommen, die potentielle Energie U des Systems habe als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten q_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) ein Minimum an der Stelle $q_i = q_{i0}$. Wenn wir die kleinen Verschiebungen

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{19,1}$$

einführen und U nach ihnen mit einer Genauigkeit bis zu Gliedern zweiter Ordnung entwickeln, erhalten wir die positiv definite quadratische Form

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k \tag{19,2}$$

für die potentielle Energie, die wir wiederum von ihrem Minimalwert an rechnen. Da die Koeffizienten k_{ik} und k_{ki} mit ein und derselben Größe $x_i \cdot x_k$ multipliziert in die Gleichung (19,2) eingehen, so ist klar, daß man sie stets als symmetrisch in ihren Indizes ansehen kann:

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

In der kinetischen Energie, die im allgemeinen Falle die Form

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik}(q)\, \dot{q}_i \dot{q}_k$$

hat (s. (5,5)), setzen wir in die Koeffizienten $q_i = q_{i0}$ und bezeichnen die Konstanten $a_{ik}(q_0)$ mit m_{ik}. Damit ergibt sich für die kinetische Energie die positiv definite quadratische Form

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k . \tag{19,3}$$

Die Koeffizienten m_{ik} kann man ebenfalls stets als symmetrisch in ihren Indizes annehmen, d. h.

$$m_{ik} = m_{ki} .$$

Damit lautet die LAGRANGE-Funktion eines Systems, das freie kleine Schwingungen ausführt,

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) . \tag{19,4}$$

Wir stellen nunmehr die Bewegungsgleichungen auf. Zur Bestimmung der in sie eingehenden Ableitungen schreiben wir das totale Differential der LAGRANGE-Funktion auf:

$$\mathrm{d}L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \, \mathrm{d}\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k \, \mathrm{d}\dot{x}_i - k_{ik} x_i \, \mathrm{d}x_k - k_{ik} x_k \, \mathrm{d}x_i) .$$

Da der Wert der Summe selbstverständlich nicht von der Bezeichnung der Summationsindizes abhängt, vertauschen wir im ersten und dritten Glied in der Klammer i und k; wegen der Symmetrie der Koeffizienten m_{ik} und k_{ik} erhalten wir

$$\mathrm{d}L = \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_k \, \mathrm{d}\dot{x}_i - k_{ik} x_k \, \mathrm{d}x_i) .$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik} \dot{x}_k , \qquad \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \sum_k k_{ik} x_k .$$

Damit lautet die LAGRANGE-Gleichung

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0 . \tag{19,5}$$

Sie bilden ein System von s ($i = 1, 2, \ldots, s$) linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Nach allgemeinen Regeln suchen wir zur Lösung dieser Gleichungen s unbekannte Funktionen $x_k(t)$ der Form

$$x = A_k \, \mathrm{e}^{-i \omega t} , \tag{19,6}$$

worin A_k irgendwelche zunächst unbestimmte Konstanten sind. Wenn wir (19,6) in das System (19,5) einsetzen, erhalten wir nach Kürzung von $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ ein System von linearen homogenen algebraischen Gleichungen, denen die Konstanten A_k genügen müssen:

$$\sum_k (- \omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0 . \tag{19,7}$$

Damit dieses System von Null verschiedene Lösungen hat, muß seine Determinante verschwinden, d. h.

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0 . \tag{19,8}$$

Diese Gleichung — die sogenannte *charakteristische* Gleichung — ist eine Gleichung vom Grade s in ω^2. Sie hat im allgemeinen Falle s verschiedene reelle positive Wurzeln ω_α^2 ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$). Die hierdurch definierten Größen ω_α^2 heißen *Eigenfrequenzen* des Systems. In speziellen Fällen können einige dieser Wurzeln der charakteristischen Gleichung zusammenfallen; derartige mehrfache Eigenfrequenzen nennt man *entartet.*

Aus physikalischen Überlegungen ist klar, daß die Wurzeln der Gleichung (19,8) reell und positiv sein müssen. Wenn nämlich ω einen Imaginärteil hätte, so bedeutete das für die zeitliche Abhängigkeit der Koordinaten x_k in (19,6) (und damit auch für die zeitliche Abhängigkeit der Geschwindigkeiten $\dot{x}_k$) ein exponentielles Abklingen oder Anwachsen des Zeitfaktors. Die Anwesenheit eines solchen Faktors ist in unserem Falle aber unzulässig, da er zu einer zeitlichen Änderung der Gesamtenergie $E = U + T$ des Systems führen würde, was dem Erhaltungssatz widerspräche.

Nachdem die Frequenzen ω_α gefunden sind, setzt man sie in Gleichung (19,7) ein und kann dann die zugehörigen Werte der Koeffizienten A_i berechnen. Im Hinblick auf die Homogenität des Systems der algebraischen Gleichungen (19,7) können diese Werte jedoch nur bis auf einen beliebigen gemeinsamen Faktor bestimmt werden. Um diesen Umstand hervorzuheben, stellen wir die Koeffizienten A_k (für jede vorkommende Frequenz ω_α) in der Form $A_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha$ mit bestimmten rellen Konstanten $\Delta_{k\alpha}$ und einer beliebigen (komplexen), vom Index k unabhängigen Konstanten C_α dar.

Eine partikuläre Lösung des Differentialgleichungssystems (19,5) hat folglich die Form

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha \mathrm{e}^{-i\omega_\alpha t} .$$

Die Summe aller partikulären Lösungen liefert die allgemeine Lösung. Wenn wir zum Realteil übergehen, können wir sie in der Form

$$x_k = \sum_\alpha \Delta_{k\alpha} Q_\alpha , \tag{19,9}$$

schreiben, wobei wir die Bezeichnung

$$Q_\alpha = \mathrm{Re}\,\{C_\alpha \mathrm{e}^{-i\omega_\alpha t}\} \tag{19,10}$$

eingeführt haben.

Das bedeutet, daß die zeitliche Änderung jeder Koordinate des Systems eine Überlagerung von s einfachen periodischen Schwingungen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ mit beliebigen Amplituden und Phasen, jedoch mit ganz bestimmten Frequenzen darstellt.

Die Frage liegt nahe, ob es nicht möglich ist, verallgemeinerte Koordinaten auf solche Weise zu wählen, daß jede von ihnen nur eine einfache Schwingung

ausführt. Die Form der allgemeinen Lösung (19,9) gibt selbst schon den Weg zur Lösung dieser Aufgabe an.

Wenn wir nämlich die s Beziehungen (19,9) als ein System von Gleichungen mit s Unbekannten Q_α ansehen, so können wir durch Auflösen dieses Systems die Größen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$ durch die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_s$ ausdrücken. Infolgedessen kann man die Größen Q_α als neue verallgemeinerte Koordinaten ansehen. Diese Koordinaten heißen *Normal*-Koordinaten, und die einfachen periodischen Schwingungen, die sie ausführen, heißen Normalschwingungen des Systems.

Die Normalkoordinaten Q_α genügen den Gleichungen

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = 0\,, \tag{19,11}$$

wie aus ihrer Definition hervorgeht. In Normalkoordinaten zerfallen die Bewegungsgleichungen also in s voneinander unabhängige Gleichungen. Die Beschleunigung jeder Normalkoordinate hängt nur vom Wert eben dieser Koordinate ab, und zur vollständigen Bestimmung ihrer zeitlichen Abhängigkeit genügt es, wenn man ihren Anfangswert und den Anfangswert der ihr entsprechenden Geschwindigkeit kennt. Mit anderen Worten, die Normalkoordinaten eines Systems sind vollkommen unabhängig voneinander.

Aus dem Gesagten folgt, daß die in Normalkoordinaten ausgedrückte LAGRANGE-Funktion in eine Summe von Ausdrücken zerfällt, von denen jeder einer eindimensionalen Schwingung mit einer der Frequenzen ω_α entspricht, d. h., sie hat die Form

$$\frac{m_\alpha}{2}(\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)\,,$$

wo m_α eine positive Konstante ist. Dieser Konstanten kann man durch Veränderung des gemeinsamen Faktors des erhaltenen Koeffizientensatzes $\Delta_{k\alpha}$ in (19,9) einen beliebigen Wert zuordnen. Gewöhnlich wählt man die Normalkoordinaten so, daß $m_\alpha = 1$ wird. Dann erhält die vollständige LAGRANGE-Funktion des Systems die Form[1])

$$L = \frac{1}{2}\sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2)\,. \tag{19,12}$$

Wenn wir es mit einem System von Teilchen zu tun haben, die miteinander in Wechselwirkung stehen, sich aber nicht in einem äußeren Feld befinden, so haben nicht alle Freiheitsgrade Schwingungscharakter. Ein typisches Beispiel solcher Systeme sind Moleküle. Außer den Bewegungen, die Schwingungen der Atome um ihre Gleichgewichtslage im Molekül darstellen, kann das Molekül als Ganzes translatorische und Drehbewegungen ausführen.

[1]) Für entartete Frequenzen ist die Wahl dieser Normalkoordinaten aber noch nicht ganz eindeutig. Da die Normalkoordinaten (mit gleichem ω_α) als sich in gleicher Weise transformierende Summen $\sum Q_\alpha^2$ und $\sum \dot{Q}_\alpha^2$ in die kinetische und potentielle Energie eingehen, kann man sie einer beliebigen linearen, die Quadratsumme invariant lassenden Transformation unterwerfen.

Der Translation und im allgemeinen auch der Rotation entsprechen je drei Freiheitsgrade, so daß von den $3n$ Freiheitsgraden eines n-atomigen Moleküls im ganzen $3n - 6$ für Schwingungen übrigbleiben. Eine Ausnahme bilden Moleküle, in denen alle Atome auf einer Geraden liegen. Da es keinen Sinn hat, von einer Rotation um diese Gerade zu sprechen, so existieren in diesem Falle nur zwei Rotationsfreiheitsgrade und dementsprechend $3n - 5$ Schwingungsfreiheitsgrade.

Die Normalschwingungen eines Moleküls können nach der Art der Bewegung der Atome auf Grund von Überlegungen klassifiziert werden, die mit der Symmetrie der Verteilung der Atome im Molekül (in der Gleichgewichtslage) zusammenhängen. Hierfür existiert eine allgemeine Methode, welche die Gruppentheorie benutzt. Hier wollen wir nur einige elementare Beispiele betrachten.

Wenn alle n Atome eines Moleküls in einer Ebene liegen, so kann man Normalschwingungen, bei denen die Atome in dieser Ebene bleiben, und solche, bei denen die Atome diese Ebene verlassen, unterscheiden. Die auf jede der beiden Arten entfallende Anzahl ist leicht zu bestimmen. Da für die Bewegung in der Ebene im ganzen $2n$ Freiheitsgrade existieren, darunter zwei der Translation und eine der Rotation, so ist die Anzahl der Normalschwingungen, bei denen die Atome in der Ebene bleiben, gleich $2n - 3$. Die übrigen $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$ Schwingungsfreiheitsgrade entsprechen Schwingungen, bei denen die Atome die Ebene verlassen.

Im Falle eines linearen Moleküls kann man Längsschwingungen, die die geradlinige Form erhalten, und Schwingungen, bei denen die Atome die Gerade verlassen, unterscheiden. Da für die Bewegung von n Teilchen auf einer Linie n Freiheitsgrade existieren, von denen einer der Translation entspricht, so ist die Anzahl der Schwingungen, bei denen die Atome auf der Geraden bleiben, gleich $n - 1$. Da die Gesamtzahl der Schwingungsfreiheitsgrade eines linearen Moleküls gleich $3n - 5$ ist, gibt es $2n - 4$ Schwingungsfreiheitsgrade, bei denen die Atome die Gerade verlassen. Diesen Schwingungen entsprechen jedoch nur $n - 2$ verschiedene Frequenzen, da jede dieser Schwingungen auf zwei unabhängige Weisen verwirklicht werden kann, nämlich in zwei senkrecht aufeinander stehenden Ebenen (die durch die Molekülachse gehen); aus Symmetrieüberlegungen folgt, daß jedes Paar dieser Normalschwingungen die gleiche Frequenz hat.

Aufgaben

1. Berechne die Schwingungen eines Systems mit zwei Freiheitsgraden, wenn die LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha x y$$

lautet (zwei gleiche eindimensionale Systeme mit der Eigenfrequenz ω_0, die durch die Wechselwirkung $-\alpha x y$ miteinander gekoppelt sind).

Lösung: Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y\,, \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x\,.$$

Einsetzen von (19,6) ergibt

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, \quad A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \tag{1}$$

Die charakteristische Gleichung ist $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$, woraus

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha$$

folgt. Für $\omega = \omega_1$ liefern die Gleichungen (1) $A_x = A_y$, für $\omega = \omega_2$ dagegen $A_x = -A_y$. Damit wird

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

(die Koeffizienten $1/\sqrt{2}$ entsprechen der im Text erwähnten Normierung der Normalkoordinaten).

Für $a \ll \omega_0^2$ (schwache Kopplung) erhalten wir

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2}.$$

Die Änderung von x und y besteht in diesem Falle aus einer Überlagerung von zwei Schwingungen, deren Frequenzen sich nur wenig voneinander unterscheiden, d. h., die Schwingung hat Schwebungscharakter mit der Schwebungsfrequenz $\omega_2 - \omega_1 = \alpha$ (s. § 18). Hierbei durchläuft die Amplitude der Koordinate y ein Minimum, wenn die Amplitude der Koordinate x ein Maximum hat, und umgekehrt.

2. Berechne die kleinen Schwingungen eines ebenen Doppelpendels (Abb. 1).

Lösung: Für kleine Schwingungen ($\varphi_1 \ll 1, \varphi_2 \ll 1$) lautet die in Aufgabe 1, § 5, gefundene LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{m_1 + m_2}{2} g l_1 \varphi_1^2 - \frac{m_2}{2} g l_2 \varphi_2^2.$$

Die Bewegungsgleichungen sind

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g \varphi_1 = 0,$$
$$l_1 \ddot{\varphi}_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 + g \varphi_2 = 0.$$

Nach Einsetzen von (19,6) ergibt sich

$$A_1 (m_1 + m_2)(g - l_1 \omega^2) - A_2 \omega^2 m_2 l_2 = 0,$$
$$- A_1 l_1 \omega^2 + A_2 (g - l_2 \omega^2) = 0.$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung heißen

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{g}{2 m_1 l_1 l_2} \Big\{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{(m_1 + m_2)[(m_1 + m_2)(l_1 + l_2)^2 - 4 m_1 l_1 l_2]}\Big\}.$$

Für $m_1 \to \infty$ streben die Frequenzen den Grenzwerten $\sqrt{g/l_1}$ und $\sqrt{g/l_2}$ zu, die den unabhängigen Schwingungen zweier Pendel entsprechen.

3. Bestimme die Bahn eines Teilchens im Zentralfeld $U = k r^2/2$ (sogenannter *räumlicher Oszillator*).

Lösung. Die Bewegung verläuft, wie in jedem Zentralfeld, in einer Ebene, welche wir als xy-Ebene wählen. Die Änderung jeder der Koordinaten x, y stellt eine einfache Schwingung mit der gemeinsamen Frequenz $\omega = \sqrt{k/m}$ dar:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \quad y = b \cos(\omega t + \beta)$$

oder

$$x = a \cos \varphi\,, \qquad y = b \cos (\varphi + \delta) = b \cos \delta \cos \varphi - b \sin \delta \sin \varphi$$

mit $\varphi = \omega t + \alpha$, $\delta = \beta - \alpha$. Wenn wir hieraus $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ bestimmen und die Summe ihrer Quadrate bilden, erhalten wir die Bahngleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\,x\,y}{a\,b} \cos \delta = \sin^2 \delta\,.$$

Dies ist eine Ellipse mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Für $\delta = 0$ oder π entartet die Bahn in Geraden.

§ 20. Gedämpfte Schwingungen

Bisher haben wir stets angenommen, daß die Bewegung der Körper im leeren Raum vor sich geht oder daß der Einfluß des Mediums auf die Bewegung zu vernachlässigen ist. In Wirklichkeit setzt das Medium der Bewegung des Körpers einen Widerstand entgegen, der sie zu verlangsamen sucht. Die Energie des sich bewegenden Körpers geht hierbei letzten Endes in Wärme über, man sagt, sie dissipiert.

Der Bewegungsprozeß ist unter diesen Bedingungen schon kein rein mechanischer Vorgang mehr, und seine Betrachtung fordert die Berücksichtigung der Bewegung des Mediums selbst und des inneren Wärmezustandes sowohl des Mediums als auch des Körpers. Beispielsweise kann man im allgemeinen nicht mehr behaupten, daß die Beschleunigung eines bewegten Körpers nur von seinen Koordinaten und von der Geschwindigkeit in einem gegebenen Zeitpunkt abhängt; d. h., Bewegungsgleichungen, die mit Hilfe der LAGRANGE-Funktion formuliert werden könnten, wie das in der Mechanik geschieht, existieren nicht. Damit ist das Problem der Bewegung eines Körpers im Medium bereits kein rein mechanisches Problem mehr.

Es gibt jedoch eine bestimmte Kategorie von Fällen, in denen sich die Bewegung in einem Medium näherungsweise mit Hilfe mechanischer Bewegungsgleichungen beschreiben läßt, indem in diese Gleichungen gewisse Zusatzglieder eingeführt werden. Hierher gehören Schwingungen mit Frequenzen, die klein sind im Vergleich zu den Frequenzen, die die inneren dissipativen Prozesse im Medium charakterisieren. Bei Erfüllung dieser Bedingung kann man annehmen, daß auf den Körper eine *Reibungskraft* wirkt, die (für ein gegebenes Medium) nur von der Geschwindigkeit des Körpers abhängt.

Wenn darüber hinaus diese Geschwindigkeit genügend klein ist, so kann man die Reibungskraft nach Potenzen der Geschwindigkeit entwickeln. Das Glied nullter Ordnung der Entwicklung ist gleich Null, da auf den ruhenden Körper überhaupt keine Reibungskraft wirkt, und das erste nicht verschwindende Glied ist proportional der Geschwindigkeit. Damit kann man die verallgemeinerte Reibungskraft f_R, die auf ein System wirkt, das eindimensionale kleine Schwingungen mit der verallgemeinerten Koordinate x ausführt, in der Form

$$f_R = -\alpha\,\dot{x}$$

schreiben, wo α ein positiver Koeffizient ist; das Minuszeichen zeigt, daß die Kraft in der zur Geschwindigkeit entgegengesetzten Richtung wirkt. Wenn wir diese Kraft auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung hinzufügen, erhalten wir:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}. \tag{20,1}$$

Wir teilen durch m und führen die Bezeichnungen

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \qquad \frac{\alpha}{m} = 2\lambda \tag{20,2}$$

ein. ω_0 ist die Frequenz der freien Schwingungen des Systems ohne Reibung. Die Größe λ heißt *Dämpfungskonstante.*[1])

Auf diese Weise erhalten wir die Gleichung

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{20,3}$$

Nach den allgemeinen Regeln für die Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten setzen wir $x = e^{rt}$ und finden für r die charakteristische Gleichung

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0,$$

woraus sich

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

ergibt. Die allgemeine Lösung der Gleichung (20,3) lautet

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \qquad r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Hier müssen zwei Fälle unterschieden werden.

Für $\lambda < \omega_0$ erhalten wir zwei konjugiert komplexe Werte für r. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung kann in diesem Falle als

$$x = \operatorname{Re}\left\{A \exp\left(-\lambda t - i t\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)\right\}$$

geschrieben werden, wo A eine beliebige komplexe Konstante ist, oder in der äquivalenten Form

$$x = a\, e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \tag{20,4}$$

mit reellen Konstanten a und α. Die durch diese Formeln dargestellte Bewegung ist eine sogenannte *gedämpfte Schwingung.* Man kann sie als harmonische Schwingung mit exponentiell abnehmender Amplitude ansehen. Die Geschwindigkeit der Amplitudenabnahme wird durch den Exponenten λ bestimmt, die „Frequenz" ω der Schwingungen ist kleiner als die Frequenz der freien Schwingungen ohne Reibung; im Falle $\lambda \ll \omega_0$ wird die Differenz zwi-

[1]) Das dimensionslose Produkt λT (wo $T = 2\pi/\omega$ die Schwingungsdauer ist) heißt *logarithmisches Dekrement* der Dämpfung.

schen ω und ω_0 eine kleine Größe zweiter Ordnung. Eine Verkleinerung der Frequenz durch die Reibung war vorauszusehen, da die Reibung die Bewegung hemmt.

Für $\lambda \ll \omega_0$ ändert sich die Amplitude der gedämpften Schwingung während einer Periode $2\pi/\omega$ kaum. In diesem Falle hat es Sinn, die (über eine Periode) gemittelten Werte der Quadrate der Koordinate und der Geschwindigkeit zu betrachten und bei der Mittelung die Änderung des Faktors $e^{-\lambda t}$ zu vernachlässigen. Diese mittleren Quadrate sind offensichtlich proportional zu $e^{-2\lambda t}$. Das bedeutet, daß auch die Energie des Systems im Mittel nach dem Gesetz

$$\bar{E} = E_0\, e^{-2\lambda t} \tag{20,5}$$

abnimmt, wo E_0 den Anfangswert der Energie bedeutet.

Wir nehmen nun $\lambda > \omega_0$ an. Dann sind beide Werte von r reell und negativ. Die allgemeine Lösung lautet hier:

$$x = c_1\, e^{-\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right) t} + c_2\, e^{-\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right) t}. \tag{20,6}$$

Man sieht, daß in diesem Falle, der bei genügend großer Reibung auftritt, die Bewegung in einer Abnahme von $|x|$ besteht, d. h. in einer asymptotischen (bei $t \to \infty$) Annäherung an die Gleichgewichtslage ohne Schwingungen. Dieser Bewegungstyp heißt *aperiodische Bewegung*.

In dem speziellen Fall $\lambda = \omega_0$ schließlich hat die charakteristische Gleichung nur eine (doppelte) Wurzel $r = -\lambda$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung hat in diesem Falle bekanntlich die Form

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\lambda t}. \tag{20,7}$$

Das ist ein Sonderfall der aperiodischen Bewegung. Er hat ebenfalls keinen Schwingungscharakter.

Für ein System mit vielen Freiheitsgraden sind die verallgemeinerten Reibungskräfte, die den verallgemeinerten Koordinaten x_i entsprechen, lineare Funktionen der Geschwindigkeiten:

$$f_{iR} = -\sum_k \alpha_{ik}\, \dot{x}_k\,. \tag{20,8}$$

Aus rein mechanischen Überlegungen kann man nichts aussagen über die Symmetrieeigenschaften der Koeffizienten α_{ik} bezüglich ihrer Indizes i und k. Mit den Methoden der statistischen Physik läßt sich jedoch zeigen, daß stets

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{20,9}$$

gilt. Damit kann man die Ausdrücke (20,8) als Ableitungen

$$f_{iR} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \tag{20,10}$$

der quadratischen Form

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \alpha_{ik}\, \dot{x}_i\, \dot{x}_k \tag{20,11}$$

schreiben; letztere heißt *Dissipationsfunktion.*

Die Kräfte (20.10) müssen den rechten Seiten der LAGRANGE-Gleichungen hinzugefügt werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \tag{20,12}$$

Die Dissipationsfunktion selbst hat einen wichtigen physikalischen Sinn: Sie bestimmt die Intensität der Energiedissipation im System. Davon kann man sich leicht überzeugen, indem man die zeitliche Ableitung der mechanischen Energie des Systems berechnet:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L\right) = \sum_i \dot{x}_i\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = -\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Da F eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ist, so wird nach dem EULERschen Theorem für homogene Funktionen die Summe auf der rechten Seite gleich $2F$, also

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -2F, \tag{20,13}$$

d. h., die Änderungsgeschwindigkeit der Energie des Systems ergibt sich als das Doppelte der Dissipationsfunktion. Da dissipative Vorgänge zu einer Verringerung der Energie führen, muß stets $F > 0$ sein, d. h., die quadratische Form (20,11) ist wesentlich positiv.

§ 21. Erzwungene Schwingungen bei Anwesenheit von Reibung

Die Untersuchung erzwungener Schwingungen bei Anwesenheit von Reibung läßt sich ganz analog zu den Schwingungen ohne Reibung (§ 18) durchführen. Im einzelnen wollen wir hier auf den besonders interessanten Fall einer periodischen äußeren Kraft eingehen.

Wenn wir auf der rechten Seite der Gleichung (20,1) die äußere Kraft $f \cos \gamma t$ hinzufügen und durch m teilen, erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos \gamma t. \tag{21,1}$$

Die Lösung dieser Gleichung sucht man zweckmäßigerweise in komplexer Form, deswegen schreiben wir auf der rechten Seite $\mathrm{e}^{-i\gamma t}$ statt $\cos \gamma t$:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\mathrm{e}^{-i\gamma t}.$$

Der Ansatz $x = B\,\mathrm{e}^{-i\gamma t}$ für eine partikuläre Lösung führt zu

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \tag{21,2}$$

Wenn wir B in der Form $b\,e^{-i\delta}$ darstellen, erhalten wir für b und δ:

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{21,3}$$

Indem wir schließlich den Realteil des Ausdruckes $B e^{-i\gamma t} = b e^{-i(\gamma t + \delta)}$ abtrennen, was eine partikuläre Lösung der Gleichung (21,1) liefert, und die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung (die wir der Eindeutigkeit halber für den Fall $\omega_0 > \lambda$ aufschreiben) hinzufügen, entsteht

$$x = a\,e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta). \tag{21,4}$$

Der erste Summand nimmt exponentiell mit der Zeit ab, so daß nach genügend langer Zeit nur noch das Glied

$$x = b\cos(\gamma t + \delta) \tag{21,5}$$

übrigbleibt.

Der Ausdruck (21,3) für die Amplitude b der erzwungenen Schwingung nimmt zwar bei Annäherung der Frequenz γ an ω_0 zu, wird aber nicht unendlich, wie das bei der Resonanz ohne Reibung der Fall war. Bei gegebener Amplitude f der Kraft erreicht die Schwingungsamplitude ihren Maximalwert bei der Frequenz $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$; für $\lambda \ll \omega_0$ unterscheidet sich diese Größe von ω_0 nur um eine kleine Größe zweiter Ordnung.

Wir betrachten nun das Gebiet in der Nähe der Resonanz, setzen $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, wo ε eine kleine Größe ist, und nehmen $\lambda \ll \omega_0$ an. Dann kann man in (21,2) näherungsweise

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \qquad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0$$

schreiben, so daß sich

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon + i\lambda)\omega_0} \tag{21,6}$$

oder

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} \tag{21,7}$$

ergibt.

Wir weisen auf die charakteristische Form der Abhängigkeit der Phasendifferenz δ zwischen der Schwingung und der äußeren Kraft von der Frequenz γ der Kraft hin. δ ist stets negativ, d. h., die Schwingung ist gegen die äußere Kraft „verzögert". In großer Entfernung von der Resonanz strebt δ auf der Seite $\gamma < \omega_0$ dem Werte Null, auf der Seite $\gamma > \omega_0$ dem Werte $-\pi$ zu. Die Änderung von δ von Null bis $-\pi$ findet in einem engen Frequenzbereich (der Breite $\sim\lambda$) in der Umgebung von ω_0 statt; an der Stelle $\gamma = \omega_0$ nimmt die Phasendifferenz den Wert $-\pi/2$ an. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß bei Abwesenheit von Reibung die Änderung der Phase der erzwungenen Schwingung um den Wert π sprungartig an der Stelle $\gamma = \omega_0$ vor sich geht

(das zweite Glied (18,4) ändert sein Vorzeichen); die Berücksichtigung der Reibung glättet diesen Sprung.

Im eingeschwungenen Zustand (21,5) bleibt die Energie eines Systems, das erzwungene Schwingungen ausführt, unverändert. Das System absorbiert allerdings ununterbrochen Energie (aus der Quelle der äußeren Kraft), die infolge der Reibung dissipiert. Bezeichnen wir mit $I(\gamma)$ die im Mittel in der Zeiteinheit absorbierte Energiemenge als Funktion der Frequenz der äußeren Kraft, so erhalten wir nach (20,13)

$$I(\gamma) = 2\,\overline{F}\,,$$

wo $\overline{F}$ der (über eine Schwingungsperiode) gemittelte Wert der Dissipationsfunktion ist. Für eindimensionale Bewegung führt der Ausdruck (20,11) für die Dissipationsfunktion zu $F = \alpha\,\dot{x}^2/2 = \lambda\,m\,\dot{x}^2$. Durch Einsetzen von (21,5) ergibt sich

$$F = \lambda\,m\,b^2\,\gamma^2\sin^2(\gamma\,t + \delta)\,.$$

Das Zeitmittel des Quadrates des Sinus ist gleich 1/2, so daß gilt

$$I(\gamma) = \lambda\,m\,b^2\,\gamma^2\,. \tag{21,8}$$

Wenn wir die Schwingungsamplitude aus (21,7) einsetzen, erhalten wir in der Nähe der Resonanz

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4\,m}\,\frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}\,. \tag{21,9}$$

Eine solche Art der Abhängigkeit der Absorption von der Frequenz bezeichnet man als *Dispersion.* Der Wert von $|\varepsilon|$, bei dem sich die Größe $I(\varepsilon)$ auf die Hälfte des Maximalwerts bei $\varepsilon = 0$ verringert, heißt halbe Halbwertsbreite der Resonanzkurve (Abb. 18). Aus Formel (21,9) ist ersichtlich, daß diese

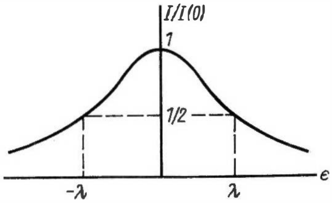


Abb. 18

Breite in unserem Falle mit der Dämpfungskonstanten λ zusammenfällt. Die Höhe des Maximums

$$I(0) = \frac{f^2}{4\,m\,\lambda}$$

ist umgekehrt proportional zu λ. Das bedeutet, daß bei Verkleinerung der Dämpfungskonstanten die Resonanzkurve schmaler und höher, ihr Maximum also schärfer wird. Die Fläche unter der Resonanzkurve bleibt dabei unverändert.

Diese Fläche ergibt sich aus dem Integral

$$\int_0^\infty I(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma = \int_{-w_0}^\infty I(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon\,.$$

Da $I(\varepsilon)$ bei Vergrößerung von $|\varepsilon|$ schnell abnimmt, so daß das Gebiet großer Werte von $|\varepsilon|$ unwesentlich ist, kann man bei der Integration $I(\varepsilon)$ in der Form (21,9) schreiben und die untere Integrationsgrenze durch $-\infty$ ersetzen. Dann folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon = \frac{f^2\lambda}{4\,m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\varepsilon^2+\lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4\,m}\,. \tag{21,10}$$

§ 22. Parametrische Resonanz

Es gibt nichtabgeschlossene Schwingungssysteme, bei denen die äußere Einwirkung in einer zeitlichen Änderung ihrer Parameter besteht.[1])

Die Parameter eines eindimensionalen Systems sind die Koeffizienten m und k in der LAGRANGE-Funktion (17,3); wenn sie von der Zeit abhängen, lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\dot{x}) + k\,x = 0. \tag{22,1}$$

Nach Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen τ statt t durch $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t/m(t)$ wird daraus

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + m\,k\,x = 0\,.$$

Es genügt daher und bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, die Bewegungsgleichung in der Form

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2(t)\,x = 0 \tag{22,2}$$

anzunehmen, die sich aus (22,1) für $m = \mathrm{const}$ ergeben würde.

Die Funktion $\omega(t)$ ergibt sich aus den Bedingungen der Aufgabe; wir setzen sie als periodische Funktion mit der Frequenz γ (und der Periode $T = 2\,\pi/\gamma$) voraus, d. h.

$$\omega\,(t + T) = \omega(t)\,.$$

Damit wird die ganze Gleichung (22,2) invariant gegenüber der Transformation $t \to t + T$. Hieraus folgt, daß mit $x(t)$ auch $x\,(t + T)$ eine Lösung der Gleichung ist. Mit anderen Worten: Wenn $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei unabhängige Lösungen der Gleichung (22,2) sind, so drücken sie sich nach der Transformation

[1]) Ein einfaches Beispiel eines solchen Systems ist ein Pendel, dessen Aufhängepunkt eine vorgegebene periodische Bewegung in vertikaler Richtung ausführt (s. Aufgabe).

$t \to t + T$ linear durcheinander aus. Hierbei kann man[1]) x_1 und x_2 so wählen, daß ihre Änderung beim Ersetzen von t durch $t + T$ auf eine Multiplikation mit einem konstanten Faktor hinausläuft:

$$x_1(t + T) = \mu_1 x_1(t), \qquad x_2(t + T) = \mu_2 x_2(t) .$$

Die allgemeinste Form einer Funktion mit diesen Eigenschaften ist

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), \qquad x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t) , \tag{22,3}$$

wo $\Pi_1(t)$, $\Pi_2(t)$ rein periodische Funktionen der Zeit (mit der Periode T) sind.

Die Konstanten μ_1 und μ_2 in diesen Funktionen müssen durch bestimmte Beziehungen miteinander verknüpft sein. Tatsächlich erhält man nach Multiplikation der Gleichungen

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)\, x_1 = 0 , \qquad \ddot{x}_2 + \omega^2(t)\, x_2 = 0$$

mit x_2 bzw. x_1 und Subtraktion

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

oder

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const} . \tag{22,4}$$

Bei Änderung des Arguments t um T erscheint aber im Falle beliebiger Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ der Form (22,3) auf der linken Seite dieser Gleichung der Faktor $\mu_1 \cdot \mu_2$. Infolgedessen kann die Gleichung (22,4) nur für

$$\mu_1 \mu_2 = 1 \tag{22,5}$$

erfüllt sein.

Weitere Schlüsse über die Konstanten μ_1, μ_2 kann man ziehen, wenn man beachtet, daß die Koeffizienten der Gleichung (22,2) reell sind. Wenn $x(t)$ eine Lösung dieser Gleichung ist, so genügt auch die konjugiert komplexe Funktion $x^*(t)$ derselben Gleichung. Daraus folgt, daß das Konstantenpaar μ_1, μ_2 mit dem Konstantenpaar μ_1^*, μ_2^* zusammenfallen muß, d. h., entweder gilt $\mu_1 = \mu_2^*$ oder μ_1 und μ_2 müssen reell sein. Im ersten Falle erhält man aus (22,5) $\mu_1 = 1/\mu_1^*$, d. h. $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$; die Konstanten μ_1 und μ_2 sind vom Betrag Eins.

Im zweiten Falle haben die beiden unabhängigen Lösungen der Gleichung (22,2) die Form

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t) , \qquad x_2(t) = \mu^{-t/T} \Pi_2(t) , \tag{22,6}$$

worin die Zahl $\mu \neq 1$ ist und positiv oder negativ sein kann. Die eine dieser Funktionen (die erste bzw. zweite bei $|\mu| > 1$ bzw. $|\mu| < 1$) steigt mit der Zeit exponentiell an. Das bedeutet, daß der Ruhezustand des Systems (in der Gleichgewichtslage ist $x = 0$) instabil ist: Es genügt eine beliebig kleine Auslenkung aus diesem Zustand, um eine zeitlich schnell anwachsende Verschiebung x hervorzurufen. Diese Erscheinung heißt *parametrische Resonanz*.

[1]) Wenn die Konstanten μ_1 und μ_2 nicht einander gleich sind.

Auf folgenden Umstand sei besonders hingewiesen: Wenn x und $\dot{x}$ zu Anfang streng gleich Null sind, so bleiben sie dies für alle späteren Zeiten. Das steht im Gegensatz zur gewöhnlichen Resonanz (§ 18), bei der die Verschiebung auch dann mit der Zeit anwächst (proportional zu t), wenn die Anfangswerte verschwinden.

Wir fragen nun nach den Bedingungen für das Auftreten parametrischer Resonanz in dem wichtigen Falle, wo die Funktion $\omega(t)$ sich wenig von einer konstanten Größe ω_0 unterscheidet und eine einfache periodische Funktion darstellt:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2 (1 + h \cos \gamma t) , \tag{22,7}$$

wo die Konstante $h \ll 1$ ist (wir nehmen h als positiv an, was man stets durch entsprechende Wahl des Zeitnullpunktes erreichen kann). Wie wir im folgenden sehen werden, tritt parametrische Resonanz auf, wenn die Frequenz der Funktion $\omega(t)$ etwa gleich der doppelten Frequenz ω_0 ist. Aus diesem Grunde setzen wir

$$\gamma = 2\,\omega_0 + \varepsilon$$

mit $\varepsilon \ll \omega_0$.

Die Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos (2\,\omega_0 + \varepsilon)\, t]\, x = 0 \tag{22,8}$$

suchen wir in der Form

$$x = a(t) \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t + b(t) \sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t , \tag{22,9}$$

wo $a(t)$ und $b(t)$ zeitlich langsam veränderliche Funktionen sind (im Vergleich zu den Faktoren cos und sin). Das stellt natürlich keine exakte Lösung dar. Letztere enthält auch Glieder mit Frequenzen, die sich von $\omega_0 + \varepsilon/2$ um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\,\omega_0 + \varepsilon$ unterscheiden; diese Glieder sind jedoch kleine Größen von höherer Ordnung in h, und in erster Näherung kann man sie vernachlässigen.

Den Frequenzwerten γ, die das Gebiet der instabilen Schwingungen von denen der stabilen abgrenzen, entspricht in (22,6) der Wert $\mu = 1$, also sind die Koeffizienten a und b in (22,9) Konstanten (unabhängig von der Zeit). Die Bestimmung der Grenzen des Resonanzgebietes führt folglich zum Auffinden derjenigen γ-Werte (oder auch der ε-Werte), bei denen die Bewegungsgleichung (mit der erforderlichen Genauigkeit) die Lösung (22,9) mit konstantem a und b befriedigt. Wenn man (22,9) in (22,8) einsetzt, muß man die Produkte der trigonometrischen Faktoren in Summen

$$\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t \cdot \cos (2\,\omega_0 + \varepsilon)\, t$$
$$= \frac{1}{2} \cos\left(3\,\omega_0 + \frac{3\,\varepsilon}{2}\right) t + \frac{1}{2} \cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) t$$

usf. zerlegen und nach dem oben Gesagten die Glieder mit den Frequenzen $3\,(\omega_0 + \varepsilon/2)$ weglassen. Als Ergebnis erhalten wir:

$$b\left(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}\right)\sin\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t + a\left(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2}\right)\cos\left(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)t = 0\,.$$

Die Erfüllung dieser Gleichung erfordert das gleichzeitige Verschwinden der Koeffizienten bei Sinus und Kosinus: $\varepsilon = -\,h\,\omega_0/2$ und a = 0 oder $\varepsilon = h\,\omega_0/2$ und b = 0. Diese ε-Werte bestimmen das Grenzgebiet für die Entstehung der parametrischen Resonanz. Demnach findet diese in dem Intervall

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2} \tag{22,10}$$

um die Frequenz $2\,\omega_0$ statt.

Parametrische Resonanz findet auch dann statt, wenn die Frequenz γ in der Nähe von $2\,\omega_0/n$ liegt, wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Die Breite der Resonanzgebiete nimmt mit dem Anwachsen von n schnell ab, und zwar wie h^n.

Aufgabe

Bestimme die Bedingungen für das Auftreten parametrischer Resonanz bei kleinen Schwingungen eines ebenen Pendels, dessen Aufhängepunkt vertikale Schwingungen ausführt.

Lösung: Aus der in Aufgabe 2, § 5 gefundenen Lagrange-Funktion ergibt sich für kleine Schwingungen ($\varphi \ll 1$) die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\left(1 + 4\,\frac{a}{l}\cos\left(2\,\omega_0 + \varepsilon\right)t\right)\varphi = 0$$

($\omega_0^2 = g/l$). Hieraus ist ersichtlich, daß das Verhältnis $4\,a/l$ die Rolle des im Text eingeführten Parameters h spielt. Die Bedingung (22,10) z. B. nimmt die Form an

$$|\varepsilon| < \frac{2\,a\sqrt{g}}{l^{3/2}}\,.$$

§ 23. Anharmonische Schwingungen

Die gesamte oben dargelegte Theorie der kleinen Schwingungen beruht auf der Entwicklung der potentiellen und kinetischen Energie des Systems nach Potenzen der Koordinaten und Geschwindigkeiten unter Berücksichtigung allein der Glieder zweiter Ordnung; das führt zu linearen Bewegungsgleichungen, weshalb man in dieser Näherung von linearen Schwingungen spricht. Obwohl das Abbrechen der Entwicklung bei genügend kleinen Schwingungsamplituden durchaus gerechtfertigt ist, führt die Berücksichtigung höherer Näherungen (der sogenannten *Anharmonizität* oder *Nichtlinearität* der Schwingungen) doch zum Auftreten gewisser, zwar schwach ausgeprägter, aber qualitativ neuer Besonderheiten der Bewegung.

Wir entwickeln jetzt die Lagrange-Funktion bis zu Gliedern dritter Ordnung. In der potentiellen Energie treten hierbei Glieder dritter Ordnung in

den Koordinaten x_i auf und in der kinetischen Energie Glieder, welche Produkte der Geschwindigkeiten und der Koordinaten in der Form $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$ enthalten; dieser Unterschied zu dem früheren Ausdruck (19,3) folgt daraus, daß in der Entwicklung der Funktionen $a_{ik}(q)$ Glieder ersten Grades in x beibehalten werden. Damit erhält die LAGRANGE-Funktion die Gestalt

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum_{i,k,l} n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum_{i,k,l} l_{ikl} x_i x_k x_l , \tag{23,1}$$

wo n_{ikl}, l_{ikl} neue konstante Koeffizienten sind.

Wenn wir statt der beliebigen Koordinaten x_i Normalkoordinaten (linearer Näherung) Q_α einführen, so gehen infolge der Linearität der Transformation die dritte und vierte Summe in (23,1) in analoge Summen über, in denen statt der Koordinaten x_i und Geschwindigkeiten $\dot{x}_i$ die Q_α und $\dot{Q}_\alpha$ stehen. Wenn wir die Koeffizienten in diesen Summen mit $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ und $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ bezeichnen, erhalten wir als LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma . \tag{23,2}$$

Wir wollen nicht die aus dieser LAGRANGE-Funktion folgenden Bewegungsgleichungen vollständig aufschreiben. Wesentlich ist, daß sie die Form

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha (Q, \dot{Q}, \ddot{Q}) \tag{23,3}$$

haben, wo f_α homogene Funktionen zweiten Grades der Koordinaten Q und ihrer zeitlichen Ableitungen sind.

Unter Anwendung der Methode der sukzessiven Näherungen machen wir für die Lösung dieser Gleichungen den Ansatz

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)} , \tag{23,4}$$

wo $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ ist und die Funktionen $Q_\alpha^{(1)}$ den *ungestörten* Gleichungen

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0$$

genügen; sie stellen also gewöhnliche harmonische Schwingungen dar, d. h.

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos (\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) . \tag{23,5}$$

In der nächsten Näherung berücksichtigen wir auf der rechten Seite der Gleichung (23,3) nur Glieder zweiter Ordnung und erhalten für die Größen $Q_\alpha^{(2)}$ die Gleichungen

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}) , \tag{23,6}$$

wo auf der rechten Seite die Ausdrücke (23,5) einzusetzen sind. Dabei entstehen lineare homogene Differentialgleichungen, deren rechte Seiten man als Summen

einfacher periodischer Funktionen schreiben kann, wie z. B.

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta)$$
$$= \frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{\cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta) t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta]$$
$$+ \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta) t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta]\} .$$

Auf den rechten Seiten der Gleichungen (23,6) treten also Glieder auf, die Schwingungen mit Frequenzen entsprechen, welche gleich den Summen und Differenzen der Eigenfrequenzen des Systems sind. Die Lösung der Gleichungen muß man in einer Form suchen, die derartige periodische Faktoren enthält, und wir kommen zu dem Ergebnis, daß sich in der zweiten Näherung den Normalschwingungen des Systems mit den Frequenzen ω_α zusätzliche Schwingungen mit den Frequenzen

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \tag{23,7}$$

überlagern (darunter auch die doppelten Frequenzen $2\,\omega_\alpha$ und die Frequenz 0, die einer konstanten Verschiebung entspricht). Man nennt sie *Kombinationsfrequenzen*. Die Amplituden der Kombinationsschwingungen sind den Produkten $a_\alpha \cdot a_\beta$ (oder den Quadraten a_α^2) proportional, die aus den Amplituden der Normalschwingungen gebildet sind.

In den höheren Näherungen, bei denen also Glieder höherer Ordnung in der Entwicklung der LAGRANGE-Funktion berücksichtigt werden, treten Kombinationsschwingungen mit Frequenzen auf, die Summen und Differenzen einer größeren Anzahl von Frequenzen ω_α sind. Außerdem zeigt sich aber noch eine neue Erscheinung.

Es gibt nämlich bereits in der dritten Näherung unter den Kombinationsfrequenzen auch solche, die mit den Ausgangsfrequenzen ω_α (Kombinationen der Form $\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$) zusammenfallen. Wenn man die oben beschriebene Methode anwendet, treten auf der rechten Seite der Bewegungsgleichungen Resonanzglieder auf, die zur Lösung Beiträge mit zeitlich anwachsender Amplitude liefern. Es ist aber physikalisch klar, daß in einem abgeschlossenen System bei Abwesenheit einer äußeren Energiequelle die Schwingungen nicht von selbst beliebig groß werden können.

In Wirklichkeit ändern sich in den höheren Näherungen die Grundfrequenzen ω_α im Vergleich zu ihren „ungestörten" Werten $\omega_\alpha^{(0)}$, die im quadratischen Glied der potentiellen Energie stehen. Das Auftreten zeitlich anwachsender Glieder hängt mit Entwicklungen vom Typ

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)\, t \approx \cos \omega_\alpha^{(0)} t - t\, \Delta\omega_\alpha \sin \omega_\alpha^{(0)} t$$

zusammen, die bei großen t-Werten offenbar unzulässig sind.

Bewegung des starren Körpers — VI

§ 24. Winkelgeschwindigkeit

Den *starren Körper* kann man in der Mechanik als ein System von Massenpunkten definieren, deren Abstände voneinander unveränderlich sind. Systeme, die tatsächlich in der Natur vorkommen, erfüllen diese Bedingung natürlich nur näherungsweise. Die meisten starren Körper ändern aber unter gewöhnlichen Bedingungen ihre Formen und Ausmaße so wenig, daß wir diese Änderungen durchaus vernachlässigen können, wenn wir die Bewegungsgesetze des als Ganzes betrachteten starren Körpers untersuchen.

In den folgenden Darlegungen werden wir den starren Körper oft als eine diskrete Gesamtheit von Massenpunkten darstellen; dadurch erreicht man eine gewisse Vereinfachung der Ableitungen. Das widerspricht jedoch in keiner Weise dem Umstand, daß man in Wirklichkeit den starren Körper in der Mechanik als ein Kontinuum ansehen kann, dessen innere Struktur gar nicht interessiert. Der Übergang von den Summen über diskrete Punkte zu den Formeln des Kontinuums geschieht einfach dadurch, daß man die Masse des Teilchens durch die Masse $\varrho \mathrm{d}V$ ersetzt, die im Volumenelement $\mathrm{d}V$ eingeschlossen ist (ϱ ist die Dichte), und über das ganze Volumen des Körpers integriert.

Zur Beschreibung der Bewegung des starren Körpers führen wir zwei Koordinatensysteme ein: ein „ruhendes", d. h. ein Inertialsystem XYZ und ein bewegliches System mit den Koordinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, das mit dem Körper starr verbunden sein soll und an allen seinen Bewegungen teilnimmt. Den Nullpunkt des bewegten Koordinatensystems legt man zweckmäßigerweise in den Schwerpunkt des Körpers.

Die Lage des starren Körpers bezüglich des ruhenden Koordinatensystems ist durch die Angabe der Lage des bewegten Systems vollständig bestimmt. Der Radiusvektor $\boldsymbol{R}_0$ möge zum Nullpunkt 0 des bewegten Systems führen (Abb. 19). Die Richtungen der Achsen dieses Systems bezüglich des ruhenden werden durch drei voneinander unabhängige Winkel festgelegt, so daß wir zusammen mit den drei Komponenten des Vektors $\boldsymbol{R}_0$ insgesamt sechs Koordinaten erhalten. Das bedeutet, daß jeder beliebig starre Körper ein mechanisches System mit sechs Freiheitsgraden bildet.

Wir betrachten nun eine beliebige unendlich kleine Verschiebung des starren Körpers. Sie läßt sich als Summe von zwei Bewegungen darstellen, nämlich einer unendlich kleinen Parallelverschiebung, bei der der Schwerpunkt aus der Anfangs- in die Endlage übergeht, die Achsenrichtungen des bewegten Systems

aber unverändert bleiben, und einer unendlich kleinen Drehung um den Schwerpunkt, bei der der starre Körper seine Endlage erreicht.

Wir bezeichnen den Radiusvektor eines beliebigen Punktes des starren Körpers im bewegten Koordinatensystem mit $\boldsymbol{r}$ und den Radiusvektor desselben Punktes im ruhenden System mit $\boldsymbol{R}$. Dann setzt sich eine infinitesimale Ver-

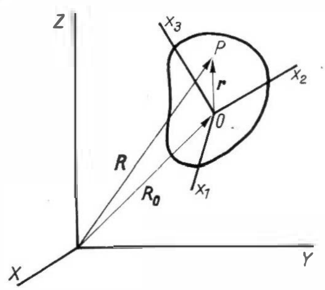


Abb. 19

schiebung $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ des Punktes P aus der Verschiebung $\mathrm{d}\boldsymbol{R}_0$ des Schwerpunktes und aus der auf den Schwerpunkt bezogenen Verschiebung $[\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{r}]$ zusammen, die der Punkt bei Drehung um den infinitesimalen Winkel $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$ erfährt (s. (9,1)), d. h.

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R} = \mathrm{d}\boldsymbol{R}_0 + [\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}\,\boldsymbol{r}]\,.$$

Wenn wir diese Gleichung durch die Zeit $\mathrm{d}t$ dividieren, in der die betrachtete Verschiebung vor sich ging, und die Geschwindigkeiten

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}_0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{V}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \tag{24,1}$$

einführen, so erhalten wir eine Beziehung zwischen diesen Geschwindigkeiten, nämlich

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]\,. \tag{24,2}$$

Der Vektor $\boldsymbol{V}$ ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des starren Körpers; sie wird auch Geschwindigkeit der *Translationsbewegung* genannt. Der Vektor $\boldsymbol{\Omega}$ heißt *Winkelgeschwindigkeit* der Drehung des starren Körpers; seine Richtung fällt (ebenso wie die Richtung von $\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$) mit der Richtung der Drehachse zusammen. Damit kann die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eines beliebigen Punktes des Körpers (bezüglich des ruhenden Koordinatensystems) durch die Translationsgeschwindigkeit des Körpers und durch die Winkelgeschwindigkeit seiner Drehung ausgedrückt werden.

Es sei betont, daß bei der Ableitung der Formel (24,2) überhaupt nicht wichtig war, daß wir gerade den Schwerpunkt des Körpers als Nullpunkt genommen haben. Die Vorteile dieser Wahl zeigen sich erst später bei der Berechnung der Energie des bewegten Körpers.

Wir nehmen nun an, daß das starr mit dem Körper verbundene Koordinatensystem so gewählt ist, daß sein Nullpunkt nicht im Schwerpunkt O, sondern in irgend einem Punkt O' liegt, der sich im Abstand $\boldsymbol{a}$ vom Punkt O befindet. Die Geschwindigkeit des Nullpunktes O' dieses Systems bezeichnen wir mit $\boldsymbol{V}'$ und seine Rotationsgeschwindigkeit mit $\boldsymbol{\Omega}'$.

Wir betrachten wiederum einen beliebigen Punkt P des starren Körpers und bezeichnen seinen Radiusvektor bezüglich des Nullpunktes O' mit $\boldsymbol{r}'$. Dann wird $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}$ und Einsetzen in (24,2) ergibt

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{r}'] .$$

Andererseits muß nach der Definition von $\boldsymbol{V}'$ und $\boldsymbol{\Omega}'$ gelten: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}' + [\boldsymbol{\Omega}'\, \boldsymbol{r}']$. Daraus schließen wir auf

$$\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{a}] , \qquad \boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} . \tag{24,3}$$

Die zweite dieser Gleichungen ist sehr wesentlich. Wir sehen, daß die Winkelgeschwindigkeit, mit der das starr mit dem Körper verbundene Koordinatensystem in jedem gegebenen Zeitpunkt rotiert, von diesem System vollkommen unabhängig ist. Sämtliche derartige Systeme rotieren in einem gegebenen Zeitpunkt um parallel zueinander liegende Achsen mit dem Betrag nach gleicher Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$. Dieser Umstand berechtigt uns, $\boldsymbol{\Omega}$ die Rotationsgeschwindigkeit des Körpers an sich zu nennen. Die Translationsgeschwindigkeit dagegen hat nicht einen derartigen „absoluten" Charakter.

Wenn $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\Omega}$ (in einem gegebenen Zeitpunkt) bei einer bestimmten Wahl des Nullpunktes senkrecht aufeinander stehen, so folgt aus der ersten Formel (24,3), daß sie (d. h. $\boldsymbol{V}'$ und $\boldsymbol{\Omega}'$) diese Eigenschaft auch nach Einführen eines beliebigen anderen Nullpunktes O' behalten. Nach (24,2) liegen in diesem Falle die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ sämtlicher Punkte des Körpers in ein und derselben Ebene, und zwar in einer Ebene, auf der $\boldsymbol{\Omega}$ senkrecht steht. Dabei kann man stets einen Anfangspunkt O'[1]) finden, dessen Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}'$ gleich Null ist, so daß die Bewegung des starren Körpers (in dem gegebenen Zeitpunkt) eine reine Rotation um eine Achse durch O' darstellt. Diese Achse heißt *momentane Drehachse* des Körpers.[2])

Im folgenden nehmen wir stets an, daß der Nullpunkt des bewegten Koordinatensystems im Schwerpunkt des Körpers liegt, so daß auch die Drehachse des Körpers durch den Schwerpunkt läuft. Bei einer Bewegung des Körpers ändern sich im allgemeinen sowohl der Betrag von $\boldsymbol{\Omega}$ als auch die Richtung der Drehachse.

[1]) Es kann sich natürlich zeigen, daß dieser Punkt außerhalb des Körpers liegt.

[2]) Im allgemeinen Falle, wo $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\Omega}$ nicht senkrecht aufeinander stehen, kann man den Koordinatenanfangspunkt so wählen, daß $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\Omega}$ parallel werden, d. h., die Bewegung setzt sich (in dem gegebenen Zeitpunkt) aus einer Rotation um irgendeine Achse und einer Translation entlang dieser Achse zusammen.

§ 25. Trägheitstensor

Zur Berechnung der kinetischen Energie des starren Körpers betrachten wir diesen als ein System von diskreten Massenpunkten und schreiben

$$T = \sum \frac{m v^2}{2},$$

wo über alle Punkte summiert wird, aus denen der Körper besteht. Der Einfachheit halber lassen wir hier und im folgenden die Indizes, die die Punkte numerieren, fort.

Unter Benutzung von (24,2) erhalten wir

$$T = \sum \frac{m}{2} (\boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{r}])^2 = \sum \frac{m}{2} V^2 + \sum m\, \boldsymbol{V}[\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{r}] + \sum \frac{m}{2} [\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{r}]^2 .$$

Die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{\Omega}$ sind für alle Punkte des starren Körpers gleich. Infolgedessen können wir im ersten Glied $V^2/2$ vor das Summenzeichen ziehen, dann stellt die Summe $\sum m$ die Masse des Körpers dar, die wir mit μ bezeichnen. Das zweite Glied formen wir um:

$$\sum m\, \boldsymbol{V}[\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{r}] = \sum m\, \boldsymbol{r}[\boldsymbol{V} \boldsymbol{\Omega}] = [\boldsymbol{V} \boldsymbol{\Omega}] \sum m\, \boldsymbol{r} .$$

Wenn der Nullpunkt des bewegten Systems im Schwerpunkt liegt, verschwindet dieses Glied offenbar, weil nämlich $\sum m\, \boldsymbol{r} = 0$ ist. Im dritten Glied schließlich schreiben wir das Quadrat des Vektorproduktes aus und finden als Ergebnis

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum m \left\{ \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega}\, \boldsymbol{r})^2 \right\} . \tag{25,1}$$

Die kinetische Energie des starren Körpers kann also als Summe aus zwei Teilen dargestellt werden. Das erste Glied in (25,1) ist die kinetische Energie der Translationsbewegung; sie hat die Form, als sei die gesamte Masse des Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert. Das zweite Glied ist die kinetische Energie der Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}$ um eine Achse durch den Schwerpunkt. Wir betonen, daß die Möglichkeit einer solchen Aufspaltung der kinetischen Energie in zwei Teile daraus folgt, daß wir den Nullpunkt des mit dem Körper verbundenen Koordinatensystems in seinen Schwerpunkt gelegt haben.

Wir führen nun für die kinetische Energie der Rotation die Tensorschreibweise ein, d. h., wir drücken sie durch die Komponenten x_i, Ω_i der Vektoren $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\Omega}$ aus, und erhalten

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum m \left\{ \Omega_i^2 x_l^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum m \left\{ \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_l^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k \right\} \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m \left(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k \right) . \end{aligned}$$ [1]

[1] Die Buchstaben i, k, l bezeichnen Tensor-Indizes, die die Werte 1, 2, 3 durchlaufen. Hierbei benutzen wir überall die bekannte Summationsvereinbarung, nach der die Summen-

Hier ist die Identität $\Omega_i = \delta_{ik}\,\Omega_k$ benutzt worden, wo δ_{ik} den Einheitstensor darstellt (dessen Komponenten für $i = k$ gleich 1 und für $i \neq k$ gleich 0 sind). Verwenden wir noch den Tensor

$$I_{ik} = \sum m\,(x_l^2\,\delta_{ik} - x_i\,x_k)\,, \tag{25,2}$$

so bekommen wir als endgültigen Ausdruck für die kinetische Energie des starren Körpers

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik}\,\Omega_i\,\Omega_k\,. \tag{25,3}$$

Die LAGRANGE-Funktion des starren Körpers ergibt sich, indem man von (25,3) die potentielle Energie abzieht, zu

$$L = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\, I_{ik}\,\Omega_i\,\Omega_k - U\,. \tag{25,4}$$

Die potentielle Energie ist im allgemeinen Falle eine Funktion von sechs Veränderlichen, welche die Lage des starren Körpers bestimmen, z. B. der drei Koordinaten X, Y, Z des Schwerpunktes und der drei Winkel, die die Achsenrichtungen des bewegten Systems bezüglich des ruhenden Systems festlegen.

Der Tensor I_{ik} heißt *Tensor der Trägheitsmomente* oder einfach *Trägheitstensor* des Körpers. Aus der Definition (25,2) sieht man leicht, daß er symmetrisch ist, d. h., es gilt

$$I_{ik} = I_{ki}\,. \tag{25,5}$$

Der Anschaulichkeit halber schreiben wir seine Komponenten explizit in folgender Tabelle an:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m\,(y^2 + z^2) & -\sum m\,x\,y & -\sum m\,x\,z \\ -\sum m\,y\,x & \sum m\,(x^2 + z^2) & -\sum m\,y\,z \\ -\sum m\,z\,x & -\sum m\,z\,y & \sum m\,(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \tag{25,6}$$

Die Komponenten I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} werden Trägheitsmomente bezüglich der entsprechenden Achsen genannt.

Der Trägheitstensor ist offenbar additiv: die Trägheitsmomente eines Körpers sind gleich den Summen der Trägheitsmomente seiner Teile.

Wenn man einen starren Körper als Kontinuum (mit der Dichte ϱ) betrachten kann, so ist in der Definition (25,2) die Summe durch ein Integral über das Volumen des Körpers zu ersetzen:

$$I_{ik} = \int \varrho\,(x_l^2\,\delta_{ik} - x_i\,x_k)\,\mathrm{d}V\,. \tag{25,7}$$

(Fortsetzung zu Fußnote 1, S. 76)
zeichen fortgelassen werden und über alle doppelt auftretenden Indizes (die man Summationsindizes nennt) über die Werte 1, 2, 3 zu summieren ist; so bedeuten z. B. $A_i\,B_i = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$, $A_l^2 = A_l \cdot A_l = \boldsymbol{A}^2$ usw. Die Bezeichnung der Summationsindizes kann man offenbar beliebig verändern (wenn sie nur nicht mit den Bezeichnungen anderer Tensor-Indizes in demselben Ausdruck zusammenfällt).

Wie jeder symmetrische Tensor zweiten Ranges kann der Trägheitstensor durch entsprechende Wahl der Achsenrichtungen x_1, x_2, x_3 auf Diagonalform gebracht werden. Die entsprechenden Achsen heißen *Hauptträgheitsachsen* und die entsprechenden Werte der Komponenten des Tensors *Hauptträgheitsmomente*; wir bezeichnen sie mit I_1, I_2, I_3. Bei einer solchen Wahl der Achsen x_1, x_2, x_3 nimmt die kinetische Rotationsenergie eine besonders einfache Form an, nämlich

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2)\,. \tag{25,8}$$

Wir erwähnen, daß jedes der drei Hauptträgheitsmomente nicht größer als die Summe der beiden anderen sein kann; denn es gilt (z. B.)

$$I_1 + I_2 = \sum m\,(x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3^2) \geqq \sum m\,(x_1^2 + x_2^2) = I_3\,. \tag{25,9}$$

Ein Körper, dessen drei Hauptträgheitsmomente voneinander verschieden sind, heißt *unsymmetrischer Kreisel.*

Wenn zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich sind, $I_1 = I_2 \neq I_3$, nennt man den starren Körper einen *symmetrischen Kreisel.* In diesem Falle ist die Wahl der Hauptachsenrichtungen in der x_1x_2-Ebene beliebig.

Wenn alle drei Hauptträgheitsmomente zusammenfallen, handelt es sich um einen *Kugelkreisel.* In diesem Falle hat man für alle drei Hauptträgheitsachsen freie Wahl: Man kann drei beliebige aufeinander senkrecht stehende Achsen dazu nehmen.

Das Auffinden der Hauptträgheitsachsen vereinfacht sich sehr, wenn der Körper irgendeine Symmetrie besitzt; es ist klar, daß die Lage des Schwerpunkttes und die Richtungen der Hauptträgheitsachsen derselben Symmetrie entsprechen müssen.

Besitzt der Körper eine Symmetrieebene, so muß der Schwerpunkt in dieser Ebene liegen. In ihr liegen ebenfalls zwei Hauptträgheitsachsen, und die dritte steht senkrecht auf ihr. Um einen solchen Fall handelt es sich offenbar, wenn alle Teile des Systems in einer Ebene liegen. Dann existiert eine einfache Beziehung zwischen den drei Hauptträgheitsmomenten. Wenn als Ebene des Systems die x_1x_2-Ebene gewählt wird, folgt wegen $x_3 = 0$ für alle Massenpunkte

$$I_1 = \sum m\,x_2^2\,, \quad I_2 = \sum m\,x_1^2\,, \quad I_3 = \sum m\,(x_1^2 + x_2^2)\,,$$

so daß gilt

$$I_3 = I_1 + I_2\,. \tag{25,10}$$

Wenn der Körper eine Symmetrieachse beliebiger Ordnung besitzt, so liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse. Mit ihr fällt auch eine der Hauptträgheitsachsen zusammen, die beiden anderen stehen senkrecht auf ihr. Hierbei stellt der Körper einen symmetrischen Kreisel dar, wenn die axiale Symmetrie von höherer als zweiter Ordnung ist. Tatsächlich kann man dann jede Hauptachse (die auf der Symmetrieachse senkrecht steht) um einen von 180° verschiedenen Winkel drehen, d. h., die Wahl dieser Achsen ist nicht eindeutig, was aber nur im Falle des symmetrischen Kreisels auftreten kann.

Einen Sonderfall stellt ein System dar, dessen Teile auf einer geraden Linie liegen. Wenn man diese Gerade als x_3-Achse wählt, so wird für alle Massenpunkte $x_1 = x_2 = 0$, so daß zwei Hauptträgheitsmomente zusammenfallen und das dritte gleich Null wird:

$$I_1 = I_2 = \sum m\, x_3^2\,, \qquad I_3 = 0\,. \tag{25,11}$$

Ein solches System heißt *Rotator*. Eine charakteristische Besonderheit des Rotators im Unterschied zum allgemeinen Fall eines beliebigen Körpers besteht darin, daß er insgesamt zwei (und nicht drei) Rotationsfreiheitsgrade besitzt, die Drehungen um die x_1- und x_2-Achse entsprechen; eine Rotation einer Geraden um sich selber hat offensichtlich keinen Sinn.

Zum Abschluß machen wir noch eine Bemerkung über die Berechnung des Trägheitstensors. Obwohl wir diesen Tensor bezüglich eines Koordinatensystems definiert haben, dessen Nullpunkt im Schwerpunkt liegt (nur bei dieser Definition ist die Grundformel (25,3) gültig), so kann es dennoch für seine Berechnung bequemer sein, zunächst den analogen, auf einen anderen Nullpunkt O' bezogenen Tensor

$$I'_{ik} = \sum m\,(x_l'^2\,\delta_{ik} - x_i'\,x_k')$$

zu berechnen. Wenn der Abstand OO' durch den Vektor $\boldsymbol{a}$ gegeben ist, so wird $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}$ und $x_i = x_i' + a_i$; da nach Definition des Punktes O die Beziehung $\sum m\,\boldsymbol{r} = 0$ gilt, finden wir

$$I'_{ik} = I_{ik} + \mu\,(a^2\,\delta_{ik} - a_i\,a_k)\,. \tag{25,12}$$

Nach dieser Formel kann man den gesuchten Tensor I_{ik} leicht berechnen, wenn I'_{ik} bekannt ist.

Aufgaben

1. Bestimme die Hauptträgheitsmomente von Molekülen, wenn man sie als System von Teilchen betrachtet, die sich in konstanten Abständen voneinander befinden, in folgenden Fällen:

a) Molekül aus drei Atomen, die auf einer Geraden liegen.

Lösung:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{\mu}\,(m_1\,m_2\,l_{12}^2 + m_1\,m_3\,l_{13}^2 + m_2\,m_3\,l_{23}^2)\,, \qquad I_3 = 0\,,$$

wo m_a die Massen der Atome und l_{ab} den Abstand zwischen den Atomen a und b bedeuten.

Für ein zweiatomiges Molekül ergibt sich für das Trägheitsmoment — wie zu erwarten war — das Produkt aus der reduzierten Masse beider Atome und dem Quadrat des Abstandes zwischen ihnen:

$$I_1 = I_2 = \frac{m_1\,m_2}{m_1 + m_2}\,l^2\,.$$

b) Dreiatomiges Molekül in Form eines gleichschenkligen Dreiecks (Abb. 20).

Lösung: Der Schwerpunkt liegt auf einer Höhe des Dreiecks im Abstand $m_2\,h/\mu$ von einer Grundlinie. Die Trägheitsmomente sind

$$I_1 = \frac{2\,m_1\,m_2}{\mu}\,h^2\,, \qquad I_2 = \frac{m_1}{2}\,a^2\,, \qquad I_3 = I_1 + I_2\,.$$

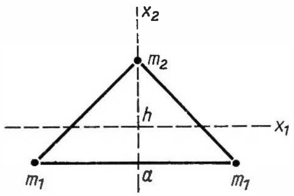


Abb. 20

2. Bestimme die Hauptträgheitsmomente homogener Körper:

a) Dünner Stab der Länge l

Lösung:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{12}\mu l^2, \qquad I_3 = 0$$

(die Dicke des Stabes ist vernachlässigt).

b) Kugel mit dem Radius R.

Lösung:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5}\mu R^2$$

(am einfachsten berechnet man die Summe $I_1 + I_2 + I_3 = 2\varrho \int r^2 \, dV$).

c) Kreiszylinder mit dem Radius R und der Höhe h.

Lösung:

$$I_1 = I_2 = \frac{\mu}{4}\left(R^2 + \frac{h^2}{3}\right), \qquad I_3 = \frac{\mu}{2} R^2$$

die Achse des Zylinders ist die x_3-Achse).

d) Quader mit den Kantenlängen a, b, c.

Lösung:

$$I_1 = \frac{\mu}{12}(b^2 + c^2), \qquad I_2 = \frac{\mu}{12}(c^2 + a^2), \qquad I_3 = \frac{\mu}{12}(a^2 + b^2)$$

(die x_1-, x_2-, x_3-Achsen sind parallel zu den Kanten a, b, c).

e) Dreiachsiges Ellipsoid mit den Halbachsen a, b, c.

Lösung: Der Schwerpunkt liegt im Mittelpunkt, und die Hauptträgheitsachsen fallen mit den Achsen des Ellipsoids zusammen. Die Integration über das Volumen des Ellipsoids kann auf eine Integration über das Volumen einer Kugel zurückgeführt werden durch die Koordinatentransformation $x = a\,\xi$, $y = b\,\eta$, $z = c\,\zeta$, wodurch die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in die Gleichung der Oberfläche der Einheitskugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

übergeht.

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment bezüglich der x-Achse

$$I_1 = \varrho \int\int\int (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \varrho \, a \, b \, c \int\int\int (b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta =$$
$$= a \, b \, c \frac{1}{2} I' (b^2 + c^2),$$

wo I' das Trägheitsmoment der Einheitskugel ist. Mit dem Volumen $4\pi a b c/3$ des Ellipsoids erhalten wir schließlich die Trägheitsmomente

$$I_1 = \frac{\mu}{5}(b^2 + c^2)\,, \qquad I_2 = \frac{\mu}{5}(a^2 + c^2)\,, \qquad I_3 = \frac{\mu}{5}(a^2 + b^2)\,.$$

3. Bestimme die Frequenz der kleinen Schwingungen eines physikalischen Pendels (eines starren Körpers, der im Schwerefeld um eine feste horizontale Achse schwingt).

Lösung: l sei der Abstand des Pendelschwerpunktes von der Drehachse, α, β, γ die Winkel zwischen den Richtungen der Hauptträgheitsachsen und der Drehachse. Als variable Koordinate führen wir den Winkel φ ein zwischen der Vertikalen und dem Lot vom Schwerpunkt auf die Drehachse. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes beträgt $V = l\dot{\varphi}$, und die Projektionen der Winkelgeschwindigkeit auf die Hauptträgheitsachsen sind $\dot{\varphi}\cos\alpha$, $\dot{\varphi}\cos\beta$, $\dot{\varphi}\cos\gamma$. Unter der Annahme, daß der Winkel φ klein ist, finden wir als potentielle Energie

$$U = \mu g l (1 - \cos\varphi) \approx \frac{1}{2}\mu g l \varphi^2\,.$$

Damit lautet die LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{\mu l^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma)\,\dot{\varphi}^2 - \frac{\mu g l^2}{2}\varphi^2\,.$$

Für die Schwingungsfrequenz erhalten wir daraus

$$\omega^2 = \frac{\mu g l}{\mu l^2 + I_1\cos^2\alpha + I_2\cos^2\beta + I_3\cos^2\gamma}\,.$$

4. Bestimme die kinetische Energie des in Abb. 21 dargestellten Systems; OA und AB sind dünne homogene Stäbe der Länge l, die durch ein Scharnier im Punkte A miteinander verbunden sind. Der Stab OA dreht sich (in der Zeichenebene) um den Punkt O, und das Ende B des Stabes AB gleitet entlang der x-Achse.

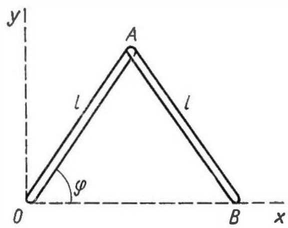


Abb. 21

Lösung: Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Stabes OA (er liegt in der Mitte des Stabes) beträgt $l\dot{\varphi}/2$, wo φ der Winkel AOB ist. Damit wird die kinetische Energie des Stabes OA

$$T_1 = \frac{\mu l^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

(μ ist die Masse des Stabes).

Die kartesischen Koordinaten des Schwerpunktes des Stabes AB sind $X = \frac{3l}{2}\cos\varphi$, $Y = \frac{l}{2}\sin\varphi$. Da die Winkelgeschwindigkeit der Drehung dieses Stabes ebenfalls gleich $\dot{\varphi}$

ist, hat er die kinetische Energie

$$T_2 = \frac{\mu}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{\mu\, l^2}{8}(1 + 8 \sin^2\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{I\,\dot{\varphi}^2}{2}.$$

Für die gesamte kinetische Energie des Systems ergibt sich also

$$T = \frac{\mu\, l^2}{3}(1 + 3 \sin^2\varphi)\dot{\varphi}^{\,2}$$

(nach Aufgabe 2a ist $I = \mu\, l^2/12$ eingesetzt worden).

5. Bestimme die kinetische Energie eines Zylinders (mit dem Radius R), der auf einer Ebene rollt. Die Masse des Zylinders ist über das Volumen so verteilt, daß eine der Hauptträgheitsachsen parallel zur Zylinderachse im Abstand a von ihr verläuft; das Trägheitsmoment bezüglich dieser Hauptachse sei I.

Lösung: Wir führen den Winkel φ zwischen der Vertikalen und dem Lot vom Schwerpunkt auf die Zylinderachse ein (Abb. 22). Die Bewegung des Zylinders in jedem Zeitpunkt kann man als reine Drehung um die momentane Drehachse betrachten, die mit der

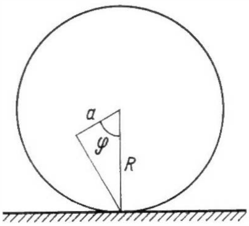


Abb. 22

Berührungslinie des Zylinders mit der ruhenden Ebene zusammenfällt; die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehung ist $\dot{\varphi}$ (die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um sämtliche parallelen Achsen ist dieselbe). Der Schwerpunkt befindet sich im Abstand $\sqrt{a^2 + R^2 - 2\,a\,R \cos\varphi}$ von der momentanen Drehachse, so daß er die Geschwindigkeit $V = \dot{\varphi}\sqrt{a^2 + R^2 - 2\,a\,R\cos\varphi}$ hat. Die gesamte kinetische Energie wird

$$T = \frac{\mu}{2}(a^2 + R^2 - 2\,a\,R\cos\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\,\dot{\varphi}^2\,.$$

6. Bestimme die kinetische Energie eines homogenen Zylinders mit dem Radius a, der auf der Innenseite einer zylindrischen Oberfläche mit dem Radius R abrollt (Abb. 23).

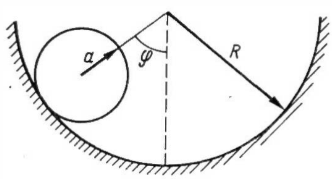


Abb. 23

Lösung: Wir führen den Winkel φ ein, der von der Vertikalen und der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte der beiden Zylinder gebildet wird. Der Schwerpunkt des rollenden Zylinders befindet sich auf dessen Achse und hat die Geschwindigkeit $V = \dot{\varphi}\,(R - a)$.

Die Winkelgeschwindigkeit berechnen wir als reine Rotationsgeschwindigkeit um die momentane Drehachse, die mit der Berührungslinie der beiden Zylinder zusammenfällt; sie ist

$$\Omega = \frac{V}{a} = \dot{\varphi}\,\frac{R - a}{a}.$$

Wenn I_3 das Trägheitsmoment bezüglich der Zylinderachse bedeutet, so ergibt sich

$$T = \frac{\mu}{2}(R - a)^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{I_3}{2}\frac{(R - a)^2}{a^2}\,\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}\mu\,(R - a)^2\,\dot{\varphi}^2$$

I_3 aus Aufgabe 2c).

§ 26. Drehimpuls des starren Körpers

Die Größe des Drehimpulses eines Systems hängt, wie wir wissen, von der Wahl des Bezugspunktes ab. In der Mechanik des starren Körpers ist es am zweckmäßigsten, hierfür den Nullpunkt des bewegten Koordinatensystems, d. h. den Schwerpunkt des Körpers zu wählen. Im folgenden verstehen wir unter $\boldsymbol{M}$ den so definierten Drehimpuls.

Wenn man den Bezugspunkt in den Schwerpunkt des Körpers legt, so fällt nach Formel (9,6) der Drehimpuls $\boldsymbol{M}$ mit dem „Eigendrehimpuls" zusammen, der allein aus der Bewegung der Punkte des Körpers relativ zum Schwerpunkt resultiert. In der Definition $\boldsymbol{M} = \sum m[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{v}]$ muß man daher $\boldsymbol{v}$ durch $[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]$ ersetzen. Das gibt

$$\boldsymbol{M} = \sum m\,[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]] = \sum m\,\{r^2\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\Omega})\}$$

oder, in Tensorschreibweise,

$$M_i = \sum m\,\{x_l^2\,\Omega_i - x_i\,x_k\,\Omega_k\} = \Omega_k \sum m\,\{x_l^2\,\delta_{ik} - x_i\,x_k\}\,.$$

Mit der Definition (25,2) des Trägheitstensors erhalten wir schließlich

$$M_i = I_{ik}\,\Omega_k\,. \tag{26,1}$$

Wenn die x_1-, x_2-, x_3-Achsen in Richtung der Hauptträgheitsachsen verlaufen, liefert diese Formel

$$M_1 = I_1\,\Omega_1\,,\qquad M_2 = I_2\,\Omega_2\,,\qquad M_3 = I_3\,\Omega_3\,. \tag{26,2}$$

Für den Kugelkreisel, bei dem alle drei Hauptträgheitsmomente zusammenfallen, folgt z. B. einfach

$$\boldsymbol{M} = I\,\boldsymbol{\Omega}\,, \tag{26,3}$$

d. h., der Vektor des Drehimpulses ist proportional zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit und hat die gleiche Richtung wie dieser.

Bei einem beliebigen Körper verläuft der Vektor $\boldsymbol{M}$ im allgemeinen nicht parallel zum Vektor $\boldsymbol{\Omega}$, sondern nur bei Rotation des Körpers um eine seiner Hauptträgheitsachsen haben $\boldsymbol{M}$ und $\boldsymbol{\Omega}$ die gleiche Richtung. Wir betrachten

nun die freie Bewegung eines starren Körpers, der nicht der Einwirkung irgendwelcher äußeren Kräfte unterliegt. Die gleichförmige Translationsbewegung, die uns nicht interessiert, schließen wir dabei aus, so daß es sich um freie Rotation handelt.

Wie für jedes abgeschlossene System ist der Drehimpuls eines frei rotierenden Körpers konstant. Für den Kugelkreisel führt die Bedingung $\boldsymbol{M} = \text{const}$ einfach zu $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$. Das bedeutet, daß die freie Rotation eines Kugelkreisels einfach in einer gleichförmigen Rotation um eine feste Achse besteht.

Ebenso einfach ist der Fall des Rotators. Hier gilt ebenfalls $\boldsymbol{M} = I\boldsymbol{\Omega}$, wobei der Vektor $\boldsymbol{\Omega}$ senkrecht auf der Achse des Rotators steht. Die freie Drehung eines Rotators geschieht daher gleichförmig in einer Ebene um eine Richtung senkrecht zu dieser Ebene.

Der Erhaltungssatz des Drehimpulses genügt, um auch die kompliziertere freie Rotation des symmetrischen Kreisels zu berechnen.

Wir nutzen die Tatsache aus, daß die Wahl der Richtungen der Hauptträgheitsachsen x_1 und x_2 (die auf der Symmetrieachse x_3 des Kreisels senkrecht stehen) beliebig ist und legen die x_2-Achse senkrecht zu der Ebene, die durch den konstanten Vektor $\boldsymbol{M}$ und die momentane Richtung der x_3-Achse aufgespannt wird. Dann wird $M_2 = 0$ und daher nach Formel (26,2) auch $\Omega_2 = 0$. Das bedeutet, daß die Richtungen von $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{\Omega}$ und der Kreiselachse in jedem Moment in einer Ebene liegen (Abb. 24). Hieraus folgt aber weiter, daß die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]$ aller Punkte auf der Kreiselachse in jedem Augen-

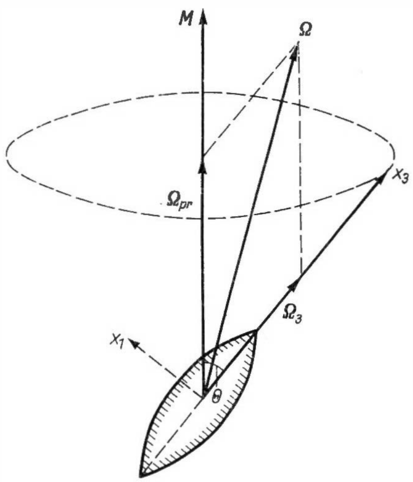


Abb. 24

blick senkrecht auf der erwähnten Ebene stehen; mit anderen Worten, die Kreiselachse rotiert gleichförmig (s. unten) um die Richtung von $\boldsymbol{M}$, wobei sie einen Kreiskegel beschreibt (sogenannte *reguläre Präzession* des Kreisels). Gleichzeitig mit der Präzession rotiert der Kreisel selbst gleichförmig um die eigene Achse.

Die Winkelgeschwindigkeiten dieser beiden Rotationen lassen sich leicht durch den vorgegebenen Betrag M des Drehimpulses und den Neigungswinkel Θ der Kreiselachse gegen die Richtung von $\boldsymbol{M}$ ausdrücken. Die Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels um die eigene Achse ist einfach die Projektion Ω_3 des Vektors $\boldsymbol{\Omega}$ auf diese Achse:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos \Theta . \tag{26,4}$$

Zur Bestimmung der Präzessionsgeschwindigkeit Ω_{pr} muß man den Vektor $\boldsymbol{\Omega}$ nach der Parallelogrammregel in eine Komponente längs x_3 und eine längs $\boldsymbol{M}$ zerlegen. Die erste dieser Komponenten führt nicht zu einer Verrückung der Kreiselachse selbst, so daß die zweite die gesuchte Winkelgeschwindigkeit der Präzession liefert. Aus der Konstruktion in Abb. 24 folgt $\sin \Theta \, \Omega_{pr} = \Omega_1$, und wegen $\Omega_1 = M_1/I_1 = M \sin \Theta / I_1$ erhalten wir

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1} . \tag{26,5}$$

§ 27. Die Bewegungsgleichungen des starren Körpers

Da der starre Körper im allgemeinen Falle sechs Freiheitsgrade besitzt, muß das System der Bewegungsgleichungen sechs unabhängige Gleichungen enthalten. Man kann sie in einer Form darstellen, die die zeitlichen Ableitungen zweier Vektoren bestimmt: die des Impulses und des Drehimpulses des Körpers.

Die erste dieser Gleichungen erhält man einfach dadurch, daß man die Gleichungen $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{f}$ für alle Teilchen, aus denen der Körper besteht, summiert; $\boldsymbol{p}$ ist der Impuls eines Teilchens, $\boldsymbol{f}$ die an ihm angreifende Kraft. Wir führen den Gesamtimpuls des Körpers

$$\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p} = \mu \boldsymbol{V}$$

und die gesamte auf ihn wirkende Kraft $\sum \boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}$ ein und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} . \tag{27,1}$$

Obwohl wir $\boldsymbol{F}$ als Summe aller Kräfte $\boldsymbol{f}$ definiert haben, die auf jedes der Teilchen wirken, darunter auch diejenigen Kräfte, die die Teilchen selbst aufeinander ausüben, gehen in $\boldsymbol{F}$ faktisch nur diejenigen Kräfte ein, die aus äußeren Quellen stammen. Sämtliche Wechselwirkungskräfte zwischen den Teilchen des Körpers selbst heben sich gegenseitig auf; bei Abwesenheit äußerer Kräfte muß nämlich, wie in jedem abgeschlossenen System, der Impuls des Körpers eine Erhaltungsgröße sein, d. h., es muß gelten $\boldsymbol{F} = 0$.

Wenn U die potentielle Energie des starren Körpers in einem äußeren Feld ist, so kann man die Kraft $\boldsymbol{F}$ durch Differenzieren von U nach den Koordinaten des Schwerpunktes berechnen:

$$\boldsymbol{F} = - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}_0} ; \tag{27,2}$$

denn bei einer Verschiebung des Körpers um $\delta \boldsymbol{R}_0$ ändern sich auch die Radiusvektoren $\boldsymbol{R}$ jedes Punktes des Körpers um dieselbe Größe, so daß die Änderung der potentiellen Energie tatsächlich

$$\delta U = \sum \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}} \delta \boldsymbol{R} = \delta \boldsymbol{R}_0 \sum \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{R}} = -\delta \boldsymbol{R}_0 \sum \boldsymbol{f} = -\boldsymbol{F}\, \delta \boldsymbol{R}_0$$

wird.

Wir gehen nun zur Ableitung der zweiten Bewegungsgleichung über, welche die zeitliche Ableitung des Drehimpulses $\boldsymbol{M}$ bestimmt. Der Bequemlichkeit halber richten wir das „ruhende" (Inertial)-System so ein, daß der Schwerpunkt des Körpers in dem betrachteten Zeitpunkt in diesem Bezugssystem ruht. Nach dem GALILEIschen Relativitätsprinzip bleibt die so erhaltene Bewegungsgleichung in jedem beliebigen anderen Inertialsystem gültig.

Wir haben

$$\dot{\boldsymbol{M}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum [\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{p}] = \sum [\dot{\boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{p}] + \sum [\boldsymbol{r}\, \dot{\boldsymbol{p}}] .$$

Aus unserer Wahl des Bezugssystems (in welchem $\boldsymbol{V} = 0$ ist) folgt, daß der Wert $\dot{\boldsymbol{r}}$ in dem gegebenen Zeitpunkt mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}}$ zusammenfällt. Da die Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$ aber die gleiche Richtung haben, muß $[\dot{\boldsymbol{r}}\, \boldsymbol{p}] = 0$ sein. Wenn wir weiterhin $\dot{\boldsymbol{p}}$ durch die Kraft $\boldsymbol{f}$ ersetzen, erhalten wir schließlich

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{K} \tag{27,3}$$

mit

$$\boldsymbol{K} = \sum [\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{f}] . \tag{27,4}$$

Der Vektor $[\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{f}]$ heißt das *Moment* (*Drehmoment*) *der Kraft* $\boldsymbol{f}$, so daß $\boldsymbol{K}$ die Summe aller Drehmomente ist, die auf den Körper wirken. Ebenso wie im Falle der Gesamtkraft $\boldsymbol{F}$ braucht man in der Summe (27,4) faktisch nur die äußeren Kräfte zu berücksichtigen; denn nach dem Erhaltungssatz des Drehimpulses muß die Summe aller Drehmomente, die innerhalb eines abgeschlossenen Systems wirken, verschwinden.

Drehmoment und Drehimpuls hängen im allgemeinen von der Wahl des Bezugspunktes ab. In (27,3) und (27,4) sind beide Größen in bezug auf den Schwerpunkt definiert.

Bei einer Verschiebung des Nullpunktes um die Strecke $\boldsymbol{a}$ sind die neuen Radiusvektoren $\boldsymbol{r}'$ der Punkte des Körpers mit den alten $\boldsymbol{r}$ durch die Beziehung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{a}$ verknüpft. Damit ergibt sich

$$\boldsymbol{K} = \sum [\boldsymbol{r}\, \boldsymbol{f}] = \sum [\boldsymbol{r}'\, \boldsymbol{f}] + \sum [\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{f}]$$

oder

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}' + [\boldsymbol{a}\, \boldsymbol{f}] . \tag{27,5}$$

Hieraus sieht man z. B., daß der Wert des Drehmomentes nicht von der Wahl des Koordinatenanfangspunktes abhängt, wenn die Gesamtkraft $\boldsymbol{F} = 0$ ist (in diesem Falle sagt man, daß an dem Körper ein *Kräftepaar* angreift).

Für die Änderung der potentiellen Energie U bei Drehung des Körpers um den unendlich kleinen Winkel $\delta\boldsymbol{\varphi}$ gilt

$$\delta U = - \sum \boldsymbol{f}\,\delta \boldsymbol{R} = - \sum \boldsymbol{f}\,[\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{r}] = - \delta\boldsymbol{\varphi} \sum [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{f}] = - \boldsymbol{K}\,\delta\boldsymbol{\varphi}\,,$$

woraus sich

$$\boldsymbol{K} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\varphi}} \tag{27,6}$$

ergibt.

Diese Formel für das Gesamtdrehmoment ist der Formel (27,2) für die Gesamtkraft analog.

Wir nehmen nun an, daß die Vektoren $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{K}$ senkrecht aufeinander stehen. In diesem Falle kann man stets einen Vektor $\boldsymbol{a}$ derart finden, daß $\boldsymbol{K}'$ in Formel (27,5) verschwindet, daß also gilt

$$\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{F}]\,. \tag{27,7}$$

Die Wahl von $\boldsymbol{a}$ ist hierbei nicht eindeutig; man kann nämlich zu $\boldsymbol{a}$ einen beliebigen zu $\boldsymbol{F}$ parallelen Vektor hinzufügen, ohne die Gleichung (27,7) zu ändern; die Bedingung $\boldsymbol{K}' = 0$ liefert also nicht einen bestimmten Punkt im ruhenden Koordinatensystem, sondern nur eine bestimmte gerade Linie. Im Falle $\boldsymbol{K} \perp \boldsymbol{F}$ kann also die Wirkung sämtlicher äußerer Kräfte auf eine einzige Kraft $\boldsymbol{F}$ reduziert werden, die längs dieser bestimmten geraden Linie angreift.

Ein Beispiel für diesen Fall liefert ein homogenes Kraftfeld, in dem die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft die Form $\boldsymbol{f} = e\,\boldsymbol{E}$ hat, wo $\boldsymbol{E}$ ein konstanter Vektor ist, der das Feld charakterisiert, und wo die Größe e die Eigenschaften des Teilchens bezüglich des gegebenen Feldes beschreibt.[1]) Dann wird

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} \sum e\,, \qquad \boldsymbol{K} = [\sum e\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}]\,.$$

Wir nehmen an, daß $\sum e \neq 0$ ist und führen den Radiusvektor $\boldsymbol{r}_0$ ein, der durch die Gleichung

$$\boldsymbol{r}_0 = \frac{\sum e\,\boldsymbol{r}}{\sum e} \tag{27,8}$$

definiert ist. Damit erhalten wir für das Gesamtdrehmoment den einfachen Ausdruck

$$\boldsymbol{K} = [\boldsymbol{r}_0\,\boldsymbol{F}]\,. \tag{27,9}$$

Die Bewegung des starren Körpers im homogenen Feld geschieht also unter der Wirkung einer einzigen Kraft $\boldsymbol{F}$, die in dem Punkt mit dem Radiusvektor (27,8) „angreift". Die Lage dieses Punktes wird vollständig durch die Eigenschaften des Körpers selbst bestimmt; im Schwerefeld beispielsweise fällt er mit dem Schwerpunkt des Körpers zusammen.

[1]) Im homogenen elektrischen Feld ist $\boldsymbol{E}$ die Feldstärke, e die Ladung des Teilchens; im homogenen Schwerefeld $\boldsymbol{E}$ ist $\boldsymbol{g}$ die Beschleunigung der Schwerkraft und e die Masse des Teilchens.

§ 28. Berührung starrer Körper

Die *Gleichgewichtsbedingungen* des starren Kröpers sind, wie aus den Bewegungsgleichungen (27,1) und (27,3) folgt, gleichbedeutend mit der Forderung, daß die gesamte angreifende Kraft und das Gesamtdrehmoment verschwinden:

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{f} = 0\,, \qquad \boldsymbol{K} = \sum [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{f}] = 0\,. \tag{28,1}$$

Die Summierung wird hier über alle am Körper angreifenden äußeren Kräfte ausgeführt, $\boldsymbol{r}$ sind die Radiusvektoren der „Angriffspunkte" der Kräfte; hierbei kann der Punkt (Koordinaten-Anfangspunkt), bezüglich dessen die Momente definiert sind, frei gewählt werden; denn im Falle $\boldsymbol{F} = 0$ hängt der Wert von $\boldsymbol{K}$ nicht von dieser Wahl ab (s. (27,5)).

Wenn wir es mit einem System von sich berührenden starren Körpern zu tun haben, so müssen bei Gleichgewicht die Bedingungen (28,1) für jeden Körper einzeln erfüllt sein. Hierbei sind auch diejenigen Kräfte zu berücksichtigen, die auf einen Körper von seiten der übrigen ihn berührenden Körper wirken. Diese Kräfte greifen in den Berührungspunkten der Körper an und heißen *Reaktionskräfte.* Für je zwei Körper sind die wechselseitigen Reaktionskräfte offenbar dem Betrag nach gleich, aber entgegengesetzt gerichtet.

Im allgemeinen Falle findet man sowohl Größe als auch Richtung der Reaktionskräfte durch gleichzeitige Lösung der Gleichungssysteme (28,1) für sämtliche Körper. In gewissen Fällen ergibt sich jedoch die Richtung der Reaktionskräfte bereits aus den Bedingungen der Aufgabe. Wenn z.B. die Oberflächen zweier Körper reibungslos aufeinander abgleiten können, so haben die Reaktionskräfte zwischen ihnen die Richtung der Flächennormalen.

Im allgemeinen treten, wenn sich die berührenden Körper relativ zueinander bewegen, neben den Reaktionskräften noch Kräfte dissipativen Charakters auf, die *Reibungskräfte.*

Es sind zwei Bewegungstypen der sich berührenden Körper möglich: *Gleiten* und *Rollen.* Beim Gleiten stehen die Reaktionskräfte senkrecht auf den sich erbührenden Oberflächen, die Reibungskräfte sind tangential zu ihnen gerichtet.

Das reine Rollen ist dadurch charakterisiert, daß es in den Berührungspunkten keine Relativbewegung der Körper gibt; mit anderen Worten, rollende Körper sind in jedem Augenblick sozusagen im Berührungspunkt befestigt. Hierbei ist die Richtung der Reaktionskraft beliebig, d. h., sie steht nicht unbedingt senkrecht auf den sich berührenden Oberflächen. Die Reibung führt beim Rollen zu einem zusätzlichen Drehmoment, das der Rollbewegung entgegenwirkt.

Wenn beim Gleiten die Reibung so klein ist, daß man sie überhaupt nicht zu berücksichtigen braucht, nennt man die Oberfläche *absolut glatt.* Ist dagegen nur ein reines Rollen ohne Gleiten möglich und kann man dabei die Reibung vernachlässigen, so heißen die Oberflächen *absolut rauh.*

In diesen beiden Fällen treten die Reibungskräfte bei der Behandlung der Bewegung der Körper nicht explizit auf, so daß ein rein mechanisches Problem vorliegt. Wenn dagegen die konkreten Eigenschaften der Reibung für die Bewe-

gung wesentlich sind, so stellt letztere schon nicht mehr einen rein mechanischen Prozeß dar (vgl. § 20).

Die Berührung von Körpern verringert die Zahl ihrer Freiheitsgrade im Vergleich zur freien Bewegung. Bisher haben wir bei der Betrachtung derartiger Aufgaben diesen Umstand dadurch berücksichtigt, daß wir Koordinaten einführten, die unmittelbar der tatsächlichen Anzahl der Freiheitsgrade entsprachen. Es zeigt sich aber, daß beim Rollen von Körpern eine solche Wahl der Koordinaten unmöglich ist.

Die Bedingung, die der Bewegung der Körper beim Rollen auferlegt wird, ist die Gleichheit der Geschwindigkeiten der sich berührenden Punkte (so muß beim Rollen eines Körpers auf einer festen Oberfläche die Geschwindigkeit des Berührungspunktes gleich Null sein). Im allgemeinen Falle drückt sich eine solche Bedingung durch *Bindungsgleichungen* der Form

$$\sum_i c_{\varkappa i}\, \dot{q}_i = 0 \tag{28,2}$$

aus, wo die $c_{\alpha i}$ nur von den Koordinaten abhängen (der Index α numeriert die Bindungsgleichungen). Wenn die linken Seiten der Gleichungen keine totalen zeitlichen Ableitungen von irgendwelchen Koordinatenfunktionen sind, lassen sich die Gleichungen nicht integrieren. Mit anderen Worten, sie führen nicht auf Beziehungen zwischen den Koordinaten allein, die man dazu benutzen könnte, die Lage der Körper durch eine kleinere Anzahl von Koordinaten zu bestimmen entsprechend der tatsächlichen Anzahl von Freiheitsgraden. Solche Bindungen heißen *nichtholonom* (im Gegensatz zu *holonomen* Bindungen, welche nur die Koordinaten des Systems miteinander verknüpfen).

Als Beispiel betrachten wir das Rollen einer Kugel auf einer ebenen Oberfläche. Wie gewöhnlich bezeichnen wir mit $\boldsymbol{V}$ die Geschwindigkeit der Translationsbewegung (Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes) und mit $\boldsymbol{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotation. Die Geschwindigkeit des Berührungspunktes der Kugel mit der Ebene ergibt sich durch Einsetzen von $\boldsymbol{r} = -a\,\boldsymbol{n}$ in die allgemeine Formel $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]$ (a ist der Kugelradius, $\boldsymbol{n}$ der Einheitsvektor der Normalen auf der Ebene im Berührungspunkt). Die gesuchte Beziehung stellt die Bedingung für die Abwesenheit von Gleitung im Berührungspunkte dar, d. h., sie ergibt sich aus der Gleichung

$$\boldsymbol{V} - a\,[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{n}] = 0\,. \tag{28,3}$$

Diese Gleichung kann nicht integriert werden. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{V}$ ist zwar die totale zeitliche Ableitung des Radiusvektors des Kugelmittelpunktes, die Winkelgeschwindigkeit aber stellt i. allg. keine totale Ableitung irgendwelcher Koordinaten dar. Das bedeutet, daß die Bindung (28,3) nichtholonom ist.[1])

[1]) Wir erwähnen, daß dieselbe Bindung beim Abrollen eines Zylinders holonom wäre. In diesem Falle behält die Rotationsachse beim Rollen ihre Richtung im Raume bei, so daß $\Omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ die totale Ableitung des Drehwinkels φ des Zylinders um seine Achse ist. Die Beziehung (28,3) läßt sich dann integrieren und liefert eine Verknüpfung zwischen den Schwerpunktskoordinaten und dem Winkel φ.

Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für sich berührende Körper existiert eine Methode, die auf der expliziten Einführung von Reaktionskräften beruht. Das Wesen dieser Methode (die den Inhalt des sogenannten D'ALEMBERT*schen Prinzips* darstellt) besteht darin, daß man für jeden der sich berührenden Körper die Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \sum \boldsymbol{f}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}t} = \sum [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{f}] \tag{28,4}$$

aufschreibt, wobei in die auf den Körper einwirkenden Kräfte $\boldsymbol{f}$ auch die Reaktionskräfte eingeschlossen werden; diese Kräfte sind zunächst unbekannt und ergeben sich zusammen mit der Bewegung des Körpers aus der Lösung der Gleichungen. Diese Methode ist sowohl bei holonomen als auch bei nichtholonomen Bindungen anwendbar.

Aufgaben

1. Bestimme mit Hilfe des D'ALEMBERTschen Prinzips die Bewegungsgleichungen einer homogenen Kugel, die unter dem Einfluß einer äußeren Kraft $\boldsymbol{F}$ und eines Drehmomentes $\boldsymbol{K}$ auf einer Ebene rollt.

Lösung: Die Bindungsgleichung (28,3) wurde schon im Text angegeben. Wir führen die Reaktionskraft (die wir mit $\boldsymbol{R}$ bezeichnen), welche im Berührungspunkt der Kugel mit der Ebene angreift, ein und schreiben die Gleichungen (28,4) auf:

$$\mu \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$I \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{K} - a[\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{R}] \tag{2}$$

(hier ist berücksichtigt worden, daß $\boldsymbol{P} = \mu\,\boldsymbol{V}$ und für den Kugelkreis $\boldsymbol{M} = I\,\boldsymbol{\Omega}$ ist). Differentiation der Bindungsgleichung (28,3) nach der Zeit ergibt

$$\dot{\boldsymbol{V}} = a[\dot{\boldsymbol{\Omega}}\,\boldsymbol{n}].$$

Wir setzen diesen Ausdruck in (1) ein, eliminieren $\dot{\Omega}$ mit Hilfe von (2) und finden die Gleichung

$$\frac{I}{a\mu}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}) = [\boldsymbol{K}\boldsymbol{n}] - a\boldsymbol{R} + a\,\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\boldsymbol{R}),$$

welche die Reaktionskraft mit $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{K}$ verknüpft. Wenn wir diese Gleichung in Komponenten schreiben und $I = \frac{2}{5}\mu a^2$ (s. Aufgabe 2b, § 25) verwenden, entsteht

$$R_x = \frac{5}{7a}K_y - \frac{2}{7}F_x, \qquad R_y = -\frac{5}{7a}K_x - \frac{2}{7}F_y, \quad R_z = -F_z$$

(als xy-Ebene ist die Abrollebene gewählt). Schließlich setzen wir diese Ausdrücke in (1) ein und erhalten als Bewegungsgleichungen, die nun nur noch die vorgegebene äußere Kraft und das Drehmoment enthalten:

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{7\mu}\left(F_x + \frac{K_y}{a}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = \frac{5}{7\mu}\left(F_y - \frac{K_x}{a}\right).$$

Die Komponenten Ω_x und Ω_y der Winkelgeschwindigkeit folgen als Funktionen von V_x und V_y aus der Bindungsgleichung (28,3) und für Ω_z ergibt sich

$$\frac{2}{5}\mu a^2 \frac{d\Omega_z}{dt} = K_z$$

(z-Komponente der Gleichung (2)).

2. Ein homogener Stab BD mit dem Gewicht P und der Länge l lehnt an einer Wand, wie Abb. 25 zeigt; sein unteres Ende B wird durch einen Faden AB festgehalten. Bestimme die Reaktion im Unterstützungspunkt und die Spannung des Fadens.

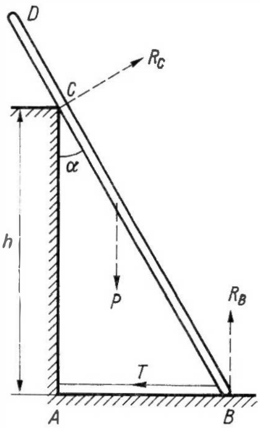


Abb. 25

Lösung: Das Gewicht des Stabes stellt eine Kraft P dar, die in der Mitte des Stabes angreift und senkrecht nach unten wirkt. Die Reaktionskraft R_B zeigt vertikal nach oben, während R_C senkrecht zum Stab steht; die Spannung des Fadens T ist von B nach A gerichtet. Aus den Gleichgewichtsbedingungen folgt

$$R_C = \frac{P\,l}{4\,h}\sin 2\alpha\,, \qquad R_B = P - R_C \sin\alpha\,, \qquad T = R_C \cos\alpha\,.$$

3. Ein Stab AB mit dem Gewicht P berührt mit seinen Enden eine horizontale und eine vertikale Ebene (Abb. 26) und wird in dieser Lage durch 2 horizontale Fäden AD und BC gehalten; der Faden BC liegt mit dem Stab AB in einer (vertikalen) Ebene. Bestimme die Reaktionen in den Unterstützungspunkten und die Spannungen der Fäden.

Lösung: Die Fadenspannungen T_A und T_B sind von A nach D bzw. von B nach C gerichtet. Die Reaktionen R_A und R_B stehen auf den entsprechenden Ebenen senkrecht. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben als Lösung

$$R_B = P\,, \qquad T_B = \frac{P}{2}\operatorname{ctg}\alpha\,,$$

$$R_A = T_B \sin\beta\,, \qquad T_A = T_B \cos\beta\,.$$

4. Zwei Stäbe der Länge l sind oben mit einem Scharnier und unten mit einem Faden AB verbunden (Abb. 27). In der Mitte des einen Stabes greift eine Kraft F an (das Gewicht der Stäbe vernachlässigen wir). Bestimme die Reaktionskräfte.

Lösung: Die Spannung T des Fadens wirkt im Punkte A von A nach B und im Punkte B von B nach A. Die Reaktionen R_A und R_B in den Punkten A und B stehen senkrecht auf der Unterstützungsebene. Wir bezeichnen mit R_C die Reaktionskraft im Scharnier, die

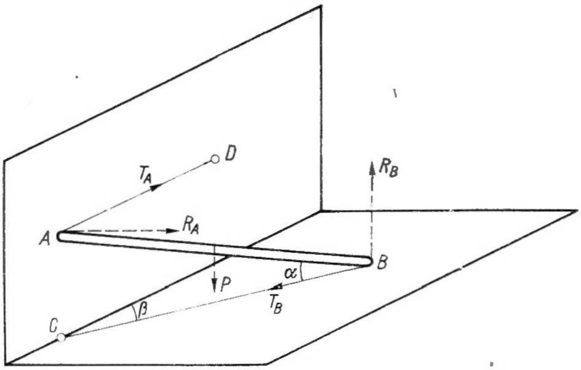


Abb. 26

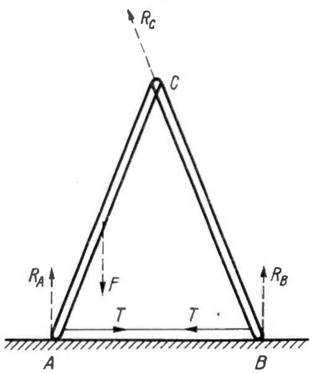


Abb. 27

auf den Stab AC wirkt; dann greift am Stab BC die Reaktion $-\boldsymbol{R}_C$ an. Die Bedingung, daß die Summe der Momente der Kräfte $\boldsymbol{R}_B$, $\boldsymbol{T}$ und $-\boldsymbol{R}_C$, die am Stab BC angreifen, verschwinden soll, führt zu dem Ergebnis, daß der Vektor $\boldsymbol{R}_C$ in der Richtung von BC liegt. Die übrigen Gleichgewichtsbedingungen (für jeden der beiden Stäbe) liefern

$$R_A = \frac{3}{4} F\,, \qquad R_B = \frac{F}{4}\,, \qquad R_C = \frac{F}{4 \sin \alpha}\,, \qquad T = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \alpha\,,$$

wo α den Winkel CAB bezeichnet.

§ 29. Bewegung in einem beschleunigten Bezugssystem

Bei der Untersuchung der Bewegung eines beliebigen mechanischen Systems haben wir bisher stets Inertialsysteme benutzt. Nur in einem Inertialsystem hat die Lagrange-Funktion beispielsweise eines einzelnen Teilchens im äußeren Feld die Form

$$L_0 = \frac{m \boldsymbol{v}_0^2}{2} - U\,, \tag{29,1}$$

der die Bewegungsgleichung

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}$$

entspricht (wir werden in diesem Paragraphen Größen, die sich auf ein Inertialsystem beziehen, mit einem Index 0 kennzeichnen).

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie die Bewegungsgleichungen eines Teilchens in einem beschleunigten Bezugssystem aussehen. Der Ausgangspunkt bei der Beantwortung dieser Frage ist wiederum das Prinzip der kleinsten Wirkung, dessen Anwendbarkeit in keiner Weise durch die Wahl des Bezugssystems eingeschränkt ist; damit bleiben auch die LAGRANGEschen Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \tag{29,2}$$

gültig. Die LAGRANGE-Funktion jedoch hat nun nicht mehr die Form (29,1), und zu ihrer Bestimmung muß man die Funktion L_0 entsprechend transformieren.

Diese Transformation nehmen wir in zwei Schritten vor. Zunächst betrachten wir ein Bezugssystem K', das sich relativ zum Inertialsystem K_0 mit der Translationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{V}(t)$ bewegt. Die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_0$ und $\boldsymbol{v}'$ des Teilchens bezüglich der Systeme K_0 und K' sind miteinander durch die Beziehung

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}(t) \tag{29,3}$$

verknüpft. Wenn wir diesen Ausdruck in (29,1) einsetzen, erhalten wir als LAGRANGE-Funktion im System K'

$$L' = \frac{m\,\boldsymbol{v}'^2}{2} + m\,\boldsymbol{v}'\,\boldsymbol{V} + \frac{m}{2}\boldsymbol{V}^2 - U\,.$$

$V^2(t)$ ist aber eine vorgegebene Zeitfunktion; sie kann als totale zeitliche Ableitung einer anderen Funktion dargestellt werden, so daß das dritte Glied in dem angeschriebenen Ausdruck unterdrückt werden kann. Ferner gilt $\boldsymbol{v}' = \mathrm{d}\boldsymbol{r}'/\mathrm{d}t$, wo $\boldsymbol{r}'$ den Radiusvektor des Teilchens im Koordinatensystem K' bedeutet. Damit ergibt sich

$$m\,\boldsymbol{V}(t)\,\boldsymbol{v}' = m\,\boldsymbol{V}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\,\boldsymbol{V}\,\boldsymbol{r}') - m\,\boldsymbol{r}'\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}\,.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in die LAGRANGE-Funktion einsetzen und wiederum die totale zeitliche Ableitung weglassen, erhalten wir schließlich

$$L' = \frac{m\,v'^2}{2} - m\,\boldsymbol{W}(t)\,\boldsymbol{r}' - U\,, \tag{29,4}$$

wo $\mathrm{W} = \mathrm{d}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t$ die Beschleunigung der Translationsbewegung des Bezugssystems K' darstellt.

Die zu (29,4) gehörenden LAGRANGEschen Gleichungen lauten

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}'} - m\,\boldsymbol{W}(t)\,. \tag{29,5}$$

Wir sehen, daß für die Bewegungsgleichungen des Teilchens eine beschleunigte Translationsbewegung des Bezugssystems äquivalent ist mit dem Auftreten eines homogenen Kraftfeldes, dessen Kraft gleich dem Produkt aus der Masse des Teilchens und der Beschleunigung $\boldsymbol{W}$ ist und die entgegengesetzte Richtung von $\boldsymbol{W}(t)$ hat.

Wir führen nun noch ein Bezugssystem K ein, das mit dem System K' einen gemeinsamen Nullpunkt hat, sich aber gegen K' mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\Omega}(t)$ dreht; im Inertialsystem K_0 führt das System K sowohl eine Translations- als auch eine Rotationsbewegung aus.

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$ des Teilchens bezüglich des Systems K' setzt sich aus seiner Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ im System K und aus der Geschwindigkeit $[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]$ seiner Rotation zusammen, die es mit dem System K gemeinsam durchführt, also

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} + [\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]$$

(die Radiusvektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{r}'$ des Teilchens in den Systemen K und K' fallen zusammen). Wir setzen diesen Ausdruck in die LAGRANGE-Funktion (29,4) ein und erhalten

$$L = \frac{m\,v^2}{2} + m\,\boldsymbol{v}\,[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}] + \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]^2 - m\,\boldsymbol{W}\boldsymbol{r} - U\,. \tag{29,6}$$

Dies ist die allgemeine Form der LAGRANGE-Funktion eines Teilchens in einem beliebigen beschleunigten Bezugssystem. Wir weisen darauf hin, daß die Rotation des Bezugssystems zum Auftreten eines Gliedes ganz besonderer Form in der LAGRANGE-Funktion führt, nämlich eines Gliedes, in das die Geschwindigkeit des Teilchens linear eingeht.

Zur Berechnung der Ableitungen, welche in die LAGRANGEschen Gleichungen eingehen, bilden wir das totale Differential

$$\begin{aligned} \mathrm{d}L &= m\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} + m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}] + m\,\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}] + m[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]\,[\boldsymbol{\Omega}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}] \\ &\quad - m\,\boldsymbol{W}\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} + m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}] + m\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\Omega}] \\ &\quad + m[[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]\,\boldsymbol{\Omega}]\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - m\,\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \end{aligned}$$

Indem wir die Glieder $\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ sammeln, ergibt sich

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\,\boldsymbol{v} + m[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = m[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\Omega}] + m\,[[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]\,\boldsymbol{\Omega}] - m\,\boldsymbol{W} - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\,.$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in (29,2) liefert die gesuchte Bewegungsgleichung

$$m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} - m\,\mathrm{W} + m[\boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{\Omega}}] + 2\,m[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\Omega}] + m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\Omega}]]\,. \tag{29,7}$$

Wir sehen, daß sich die „Trägheitskräfte“, die durch die Rotation des Bezugssystems bedingt sind, aus drei Teilen zusammensetzen. Die Kraft $m[\boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{\Omega}}]$ ist die

Folge einer ungleichförmigen Rotation, während die beiden anderen Kräfte auch bei gleichförmiger Drehung auftreten. Der Term $2\,m[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\Omega}]$ heißt *Corioliskraft*; im Gegensatz zu sämtlichen früher betrachteten (nichtdissipativen) Kräften hängt sie von der Geschwindigkeit des Teilchens ab. Der Ausdruck $m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\Omega}]]$ trägt den Namen *Zentrifugalkraft*. Sie wirkt in der Ebene durch $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{\Omega}$ senkrecht zur Drehachse (d. h. senkrecht zu $\boldsymbol{\Omega}$) und ist von dieser weg gerichtet; ihr Betrag ist $m\,\varrho\,\Omega^2$, wo ϱ den senkrechten Abstand des Teilchens von der Drehachse darstellt.

Wir betrachten nun den speziellen Fall der gleichmäßigen Rotation eines Koordinatensystems ohne Translationsbeschleunigung. Wenn wir in (29,6) und (29,7) $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$ und $\boldsymbol{W} = 0$ setzen, erhalten wir die LAGRANGE-Funktion

$$L = \frac{m\,v^2}{2} + m\,\boldsymbol{v}[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}] + \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]^2 - U \tag{29,8}$$

und die Bewegungsgleichung

$$m\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} + 2\,m\,[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\Omega}] + m[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\Omega}]]\,. \tag{29,9}$$

Wir wollen noch die Energie des Teilchens in diesem Falle berechnen. Wenn wir

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\,\boldsymbol{v} + m[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}] \tag{29,10}$$

in $E = \boldsymbol{p}\,\boldsymbol{v} - L$ einsetzen, ergibt sich

$$E = \frac{m\,v^2}{2} - \frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]^2 + U\,. \tag{29,11}$$

Wir weisen darauf hin, daß in der Energie kein Glied auftritt, das die Geschwindigkeit linear enthält. Die Rotation des Bezugssystems erzeugt ein Zusatzglied in der Energie, das nur von den Koordinaten des Teilchens abhängt und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Diese zusätzliche potentielle Energie $-\frac{m}{2}[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}]^2$ heißt *Zentrifugalenergie*.

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Teilchens im gleichförmig rotierenden Bezugssystem ist mit seiner Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ bezüglich des Inertialsystems K_0 durch die Beziehung

$$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v} + [\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}] \tag{29,12}$$

verknüpft. Infolgedessen fällt der Impuls $\boldsymbol{p}$ des Teilchens im K-System nach (29,10) mit seinem Impuls $\boldsymbol{p}_0 = m\,\boldsymbol{v}_0$ im K_0-System zusammen. Gleichzeitig nehmen auch die Drehimpulse $\boldsymbol{M}_0 = [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}_0]$ und $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}]$ dieselben Werte an. Die Energien des Teilchens in den Systemen K und K_0 sind dagegen verschieden. Wenn wir $\boldsymbol{v}$ aus (29,12) in (29,11) einsetzen, erhalten wir

$$E = \frac{m\,v_0^2}{2} - m\,\boldsymbol{v}_0[\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{r}] + U = \frac{m\,v_0^2}{2} + U - m[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{v}_0]\,\boldsymbol{\Omega}\,.$$

Die beiden ersten Glieder stellen die Energie E_0 im System K_0 dar. Einsetzen des Drehimpulses in das letzte Glied ergibt

$$E = E_0 - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega} \,. \tag{29,13}$$

Diese Formel bestimmt das Transformationsgesetz der Energie bei Übergang zu einem gleichförmig rotierenden Koordinatensystem. Wir haben sie zwar für ein einziges Teilchen abgeleitet; es ist jedoch offensichtlich, daß die Rechnung unmittelbar auf den Fall eines beliebigen Teilchensystems verallgemeinert werden kann und zu derselben Formel (29,13) führt.

Aufgaben

1. Berechne die durch die Erddrehung bedingte Ablenkung eines frei fallenden Körpers von der Vertikalen (die Rotationsgeschwindigkeit ist als klein anzunehmen).

Lösung: Im Schwerefeld gilt $U = -m\,\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{r}$, wo $\boldsymbol{g}$ den Beschleunigungsvektor der Schwerkraft darstellt; unter Vernachlässigung der Zentrifugalkraft in (29,9), die das Quadrat von $\boldsymbol{\Omega}$ enthält, ergibt sich die Bewegungsgleichung in der Form

$$\dot{\boldsymbol{v}} = 2[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\Omega}] + \boldsymbol{g} \,. \tag{1}$$

Wir lösen diese Gleichung durch sukzessive Approximation. Zu diesem Zwecke setzen wir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, wo $\boldsymbol{v}_1$ die Lösung der Gleichung $\dot{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{g}$ ist, d. h. $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{g}\,t + \boldsymbol{v}_0$ ($\boldsymbol{v}_0$ ist die Anfangsgeschwindigkeit). Wenn wir $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ in (1) einsetzen und auf der rechten Seite nur $\boldsymbol{v}_1$ berücksichtigen, erhalten wir für $\boldsymbol{v}_2$ die Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{v}}_2 = 2[\boldsymbol{v}_1\,\boldsymbol{\Omega}] = 2\,t[\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{\Omega}] + 2[\boldsymbol{v}_0\,\boldsymbol{\Omega}] \,.$$

Integration liefert

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{h} + \boldsymbol{v}_0\,t + \frac{\boldsymbol{g}\,t^2}{2} + \frac{t^3}{3}[\boldsymbol{g}\,\boldsymbol{\Omega}] + t^2[\boldsymbol{v}_0\,\boldsymbol{\Omega}] \,, \tag{2}$$

wo $\boldsymbol{h}$ den Vektor der Anfangslage des Teilchens darstellt.

Wählen wir die z-Achse vertikal nach oben und die x-Achse in Richtung des Meridians zum Pol, so gilt

$$g_x = g_y = 0 \,, \quad g_z = -g \,, \quad \Omega_x = \Omega \cos\lambda \,, \quad \Omega_y = 0 \,, \quad \Omega_z = \Omega \sin\lambda ;$$

λ ist die Breite (wir nehmen der Eindeutigkeit halber nördliche Breite an). Wenn wir in (2) $\boldsymbol{v}_0 = 0$ setzen, finden wir

$$x = 0 \,, \qquad y = -\frac{t^3}{3}\,g\,\Omega\cos\lambda \,.$$

Einsetzen der Fallzeit $t \approx \sqrt{2\,h/g}$ ergibt schließlich

$$x = 0 \,, \qquad y = -\frac{1}{3}\left(\frac{2\,h}{g}\right)^{3/2} g\,\Omega\cos\lambda$$

(negative Werte von y entsprechen einer Ablenkung nach Osten).

2. Bestimme die Ablenkung eines Körpers aus einer Ebene, der von der Erdoberfläche mit der Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ fortgeworfen wird.

Lösung: Wir wählen die xz-Ebene so, daß die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ in ihr liegt. Die Anfangshöhe sei $\boldsymbol{h} = 0$. Für die seitliche Auslenkung erhalten wir aus (2) (Aufgabe 1):

$$y = -\frac{t^3}{3}\,g\,\Omega_x + t^3\,(\Omega_x\,v_{0z} - \Omega_z\,v_{0x})$$

oder nach Einsetzen der Flugzeit $t \approx 2\, v_{0\,z}/g$:

$$y = \frac{4\, v_{0\,z}^2}{g^2}\left(\frac{1}{3}\, v_{0\,z} \cos\lambda - v_{0\,x} \sin\lambda\right)\Omega\,.$$

3. Berechne den Einfluß der Erddrehung auf kleine Pendelschwingungen (sogenanntes FOUCAULT*sches Pendel*).

Lösung: Wenn man die Amplitude der vertikalen Bewegung des Pendels als kleine Größe zweiter Ordnung vernachlässigt, so kann man annehmen, daß die Bewegung des Körpers in der horizontalen xy-Ebene verläuft. Wir unterdrücken auch die Glieder mit Ω^2 und schreiben die Bewegungsgleichung in der Form

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\,\Omega_z \dot{y}\,, \qquad \ddot{y} + \omega^2 y = -\,2\,\Omega_z \dot{x}\,,$$

wo ω die Schwingungsfrequenz des Pendels ohne Berücksichtigung der Erddrehung ist. Indem wir die zweite Gleichung mit i multiplizieren und zur ersten addieren, erhalten wir eine einzige Gleichung, nämlich

$$\ddot{\xi} + 2\,i\,\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0\,,$$

für die komplexe Größe $\xi = x + i\,y$. Für $\Omega_z \ll \omega$ heißt die Lösung dieser Gleichung

$$\xi = e^{-i\,\Omega_z t}\,(A_1 e^{i\,\omega\,t} + A_2\, e^{-\,i\,\omega\,t})$$

oder

$$x + i\,y = e^{-\,i\,\Omega_z t}\,(x_0 + i\,y_0)\,,$$

wo die Funktionen $x_0(t)$ und $y_0(t)$ die Bahn des Pendels ohne Berücksichtigung der Erddrehung liefern. Folglich führt der Einfluß dieser Rotation zu einer Drehung der Bahn um die Vertikale mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_z.

Die kanonischen Gleichungen VII

§ 30. Die Hamiltonschen Gleichungen

Bei der Formulierung der Gesetze der Mechanik mit Hilfe der Lagrange-Funktion (und der aus ihr abgeleiteten Lagrangeschen Gleichungen) wird der mechanische Zustand eines Systems durch seine verallgemeinerten Koordinaten und Geschwindigkeiten beschrieben. Eine solche Beschreibung ist jedoch nicht die einzig mögliche. Eine Reihe von Vorteilen, insbesondere bei der Untersuchung verschiedener allgemeiner Probleme der Mechanik, bietet sich bei Verwendung von verallgemeinerten Koordinaten und Impulsen des Systems. So erhebt sich die Frage, wie man die Bewegungsgleichungen findet, die einer solchen Formulierung der Mechanik entsprechen.

Den Übergang von einer Gesamtheit unabhängiger Veränderlicher zu einer anderen kann man durch eine Transformation ausführen, die in der Mathematik unter der Bezeichnung Legendre-Transformation bekannt ist. Im vorliegenden Falle bedeutet sie folgendes:

Das totale Differential der Lagrange-Funktion als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten ist

$$\mathrm{d}L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\,\mathrm{d}\dot{q}_i\,.$$

Diesen Ausdruck kann man in der Form

$$\mathrm{d}L = \sum \dot{p}_i\,\mathrm{d}q_i + \sum p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i \tag{30,1}$$

schreiben, da die Ableitungen $\partial L/\partial \dot{q}$ definitionsgemäß gleich den verallgemeinerten Impulsen sind und da wegen der Lagrangeschen Gleichungen $\partial L/\partial q_i = \dot{p}_i$ gilt.

Wir formen nun das zweite Glied in (30,1) um:

$$\sum p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i = \mathrm{d}\left(\sum p_i \dot{q}_i\right) - \sum \dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i\,,$$

bringen das totale Differential auf die linke Seite der Gleichung und vertauschen alle Vorzeichen; dann erhalten wir aus (30,1)

$$\mathrm{d}\left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) = -\sum \dot{p}_i\,\mathrm{d}q_i + \sum \dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i\,.$$

Die Größe unter dem Differentialzeichen stellt die Energie des Systems dar (s. § 6); ausgedrückt durch die Koordinaten und Impulse heißt sie die Hamilton-*Funktion* des Systems:

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L\,. \tag{30,2}$$

Aus der Beziehung

$$\mathrm{d}H = -\sum \dot{p}_i\,\mathrm{d}q_i + \sum \dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i \tag{30,3}$$

zwischen den Differentialen, wo die Koordinaten und Impulse als unabhängige Variable aufgefaßt werden, folgen die Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{30,4}$$

Dies sind die gesuchten Bewegungsgleichungen in den Veränderlichen p und q; sie heißen HAMILTON*sche Gleichungen* und bilden ein System von $2\,s$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2\,s$ unbekannten Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ (s ist die Anzahl der Freiheitsgrade); sie ersetzen die s Gleichungen zweiter Ordnung der LAGRANGEschen Methode. In Anbetracht ihrer formalen Einfachheit und Symmetrie nennt man sie auch *kanonische Gleichungen.*

Die totale zeitliche Ableitung der HAMILTON-Funktion lautet

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i .$$

Beim Einsetzen von $\dot{q}_i$ und $\dot{p}_i$ aus (30,4) heben sich die beiden letzten Glieder gegenseitig auf, so daß sich ergibt

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{30,5}$$

Wenn die HAMILTON-Funktion von der Zeit nicht explizit abhängt, so wird $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$, d. h., wir bekommen wiederum den Erhaltungssatz der Energie.

Neben den dynamischen Variablen q, $\dot{q}$ bzw. q, p enthalten die LAGRANGE- und die HAMILTON-Funktion verschiedene Parameter, welche die Eigenschaften des mechanischen Systems selbst oder des äußeren Feldes charakterisieren. λ sei einer dieser Parameter. Wenn wir ihn als veränderliche Größe ansehen, erhalten wir statt (30,1)

$$\mathrm{d}L = \sum \dot{p}_i\,\mathrm{d}q_i + \sum p_i\,\mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda ,$$

woraus mit (30,3)

$$\mathrm{d}H = -\sum \dot{p}_i\,dq_i + \sum \dot{q}_i\,\mathrm{d}p_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda}\mathrm{d}\lambda$$

folgt. Wir finden damit die Beziehung

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{p,q} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{\dot{q},q}, \tag{30,6}$$

welche die partiellen Ableitungen der LAGRANGE-Funktion und die der HAMILTON-Funktion nach dem Parameter λ verknüpft, die Indizes bei den Ableitungen weisen darauf hin, daß die Differentiation in dem einen Falle bei konstantem p und q, im anderen Falle bei konstantem q und $\dot{q}$ durchzuführen ist.

Dieses Resultat kann auch unter einem anderen Gesichtspunkt dargestellt werden. Angenommen, die LAGRANGE-Funktion habe die Form $L = L_0 + L'$, wo L' ein kleines Zusatzglied zur eigentlichen Funktion L_0 bedeutet. Dann

besteht zwischen dem entsprechenden Zusatzglied in der HAMILTON-Funktion $H = H_0 + H'$ und L' die Beziehung

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q} . \tag{30,7}$$

Aufgaben

1. Bestimme die HAMILTON-Funktion für einen einzelnen Massenpunkt in kartesischen, zylindrischen und sphärischen Koordinaten.

Lösung: In kartesischen Koordinaten x, y, z:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) .$$

In zylindrischen Koordinaten r, φ, z:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U(r, \varphi, z) .$$

In sphärischen Koordinaten r, Θ, φ:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\Theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \Theta}\right) + U(r, \Theta, \varphi) .$$

2. Bestimme die HAMILTON-Funktion eines Teilchens in einem gleichförmig rotierenden Bezugssystem.

Lösung: Aus (29,11) und (29,10) erhält man:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}] + U .$$

§ 31. Die HAMILTON-JACOBI-Gleichung

Bei der Formulierung des Prinzips der kleinsten Wirkung haben wir das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt \tag{31,1}$$

betrachtet, welches entlang der Bahn zwischen zwei vorgegebenen Lagen $q^{(1)}$ und $q^{(2)}$ genommen wurde, die das System in den gegebenen Zeitpunkten t_1 und t_2 einnimmt. Bei der Variation der Wirkung wurden die Werte dieses Integrals für benachbarte Bahnen mit ein und denselben Werten $q(t_1)$ und $q(t_2)$ verglichen. Nur eine dieser Bahnen entspricht der wirklichen Bewegung, und zwar diejenige, für die das Integral S ein Minimum wird.

Wir wollen nun den Begriff der Wirkung unter einem anderen Gesichtspunkt betrachten. Und zwar werden wir S als eine Größe ansehen, welche die Bewegung auf wahren Bahnen charakterisiert, und die Werte vergleichen, die sie für Bahnen mit gleicher Anfangslage $q(t_1) = q^{(1)}$, aber verschiedenen Endlagen im Zeitpunkt t_2 annimmt. Mit anderen Worten, wir werden das Wirkungsintegral für wirkliche Bahnen als Funktion der Koordinaten der oberen Integrationsgrenze betrachten.

Die Änderung der Wirkung beim Übergang von einer Bahn zu einer benachbarten ist (im Falle eines Freiheitsgrades) durch den Ausdruck (2,5) gegeben, also durch

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \delta q \, \mathrm{d}t \, .$$

Da die Bahn der wirklichen Bewegung den LAGRANGEschen Gleichungen genügt, verschwindet das hier auftretende Integral. Im ersten Glied nehmen wir an der unteren Grenze $\delta q(t_1) = 0$ an und bezeichnen den Wert $\delta p(t_2)$ einfach mit δq. Ferner ersetzen wir $\partial L/\partial \dot{q}$ durch p und erhalten schließlich $\delta S = p\,\delta q$ oder, im allgemeinen Falle bei beliebig vielen Freiheitsgraden,

$$\delta S = \sum_i p_i\,\delta q_i \, . \tag{31,2}$$

Aus dieser Beziehung folgt, daß die partiellen Ableitungen der Wirkung nach den Koordinaten gleich den entsprechenden Impulsen sind:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \, . \tag{31,3}$$

Analog kann man die Wirkung als explizite Funktion der Zeit auffassen, indem man Bahnen betrachtet, welche zu einem gegebenen Zeitpunkt t_1 in der Lage $q^{(1)}$ beginnen, jedoch zu verschiedenen Zeitpunkten $t_2 = t$ in der vorgegebenen Lage $q^{(2)}$ enden. Die in diesem Sinne verstandene partielle Ableitung $\partial S/\partial t$ kann man durch entsprechende Variation des Integrals finden. Es ist jedoch einfacher, die bereits bekannte Formel (31,3) zu benutzen und folgendermaßen zu verfahren.

Nach der Definition der Wirkung ist ihre totale zeitliche Ableitung längs einer Bahn

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = L \, . \tag{31,4}$$

Wenn man andererseits S als Funktion der Koordinaten und der Zeit in dem oben beschriebenen Sinne betrachtet und Formel (31,3) benutzt, erhält man

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i \dot{q} \, .$$

Vergleich beider Ausdrücke liefert

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum p_i \dot{q}_i$$

und schließlich

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(p, q, t) \, . \tag{31,5}$$

Die Formeln (31,3) und (31,5) lassen sich zusammenfassen in dem Ausdruck

$$\mathrm{d}S = \sum_i p_i \,\mathrm{d}q_i - H\,\mathrm{d}t \tag{31,6}$$

für das totale Differential der Wirkung als Funktion der Koordinaten und der Zeit an der oberen Integrationsgrenze in (31,1). Die Wirkung selbst schreibt man entsprechend in Integralform:

$$S = \int \left(\sum_i p_i \,\mathrm{d}q_i - H\,\mathrm{d}t\right) . \tag{31,7}$$

Enthält die HAMILTON-Funktion $H(p, q)$ die Zeit t nicht explizit, so daß die Energie erhalten bleibt, dann kann man $H(p, q)$ durch die Konstante E ersetzen und die Zeitabhängigkeit von S durch den Summanden $- E\,t$ berücksichtigen:

$$S(q, t) = S_0(q) - E\,t , \tag{31,8}$$

mit

$$S_0(q) = \sum_i \int p_i \,\mathrm{d}q_i . \tag{31,9}$$

Mitunter wird die Funktion $S_0(q)$ als *verkürzte Wirkung* bezeichnet.

Die Funktion $S(q, t)$ genügt einer bestimmten Differentialgleichung, welche wir erhalten, wenn wir in dem Ausdruck (31,5) die Impulse p durch die Ableitungen $\partial S/\partial q$ ersetzen:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; q_1, \ldots, q_s; t\right) = 0 . \tag{31,10}$$

Diese Gleichung mit partiellen Ableitungen erster Ordnung heißt HAMILTON-JACOBI-*Gleichung*. Für ein Teilchen im äußeren Feld $U(x, y, z, t)$ hat sie die Form:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2\,m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + U(x, y, z, t) = 0 . \tag{31,11}$$

Die HAMILTON-JACOBI-Gleichung nimmt eine etwas einfachere Form an, wenn die Funktion $H(p, q)$ nicht explizit von der Zeit abhängt. Mit $S(q, t)$ aus (31.8) erhalten wir für die verkürzte Wirkung die Gleichung

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}; q_1, \ldots, q_s\right) = E . \tag{31,12}$$

§ 32. Adiabatische Invarianten

Wir wollen nun ein mechanisches System betrachten, welches eine eindimensionale finite Bewegung ausführt und durch einen Parameter λ charakterisiert wird, der die Eigenschaften des Systems selbst oder des äußeren Feldes bestimmt, in dem sich das System befindet.

Wir nehmen an, daß sich der Parameter λ unter dem Einfluß irgendwelcher äußeren Ursachen langsam (adiabatisch, wie man sagt), mit der Zeit ändert; „langsam" ist hier so zu verstehen, daß sich λ während einer Bewegungsperiode T

des Systems nur wenig ändert, d. h.

$$T\frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda \,. \tag{32,1}$$

Ein solches System ist nicht abgeschlossen, und seine Energie E bleibt nicht erhalten. Da aber λ sehr langsam variiert, wird die Änderungsgeschwindigkeit $\dot{E}$ der Energie zu der des Parameters, $\dot{\lambda}$, proportional sein. Das bedeutet, daß sich die Energie bei einer Änderung von λ wie eine Funktion von λ verhält. Mit anderen Worten, es existiert eine Kombination von E und λ, die bei der Bewegung des Systems unverändert bleibt; diese Größe heißt *adiabatische Invariante.*

$H(p, q; \lambda)$ sei die vom Parameter λ abhängige HAMILTON-Funktion eines Systems. Nach Formel (30,5) lautet die totale zeitliche Ableitung der Energie

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{d\lambda}{dt} \,.$$

Wir mitteln diese Gleichung über eine Bewegungsperiode; da sich λ (und damit auch $\dot{\lambda}$) langsam ändert, kann man $\dot{\lambda}$ vor das Mittelungszeichen ziehen,

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\overline{\frac{\partial H}{\partial \lambda}} \,,$$

und in der zu mittelnden Funktion $\partial H/\partial\lambda$ nur die Größen p und q, nicht aber λ, als veränderlich ansehen. Die Mittelung wird demnach so durchgeführt, als finde die Bewegung des Systems bei einem vorgegebenen konstanten Wert von λ statt.

Explizit lautet die Mittelung

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial H}{\partial \lambda}\, dt \,.$$

Nach der HAMILTONschen Gleichung $\dot{q} = \partial H/\partial p$ ergibt sich

$$dt = \frac{dq}{\partial H/\partial p} \,.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ersetzen wir die Integration über die Zeit durch eine Integration über die Koordinate, wobei sich die Periode T in der Form

$$T = \int_0^T dt = \oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}$$

schreiben läßt; das Zeichen $\oint$ bedeutet hier Integration über die vollständige Änderung der Koordinate („hin" und „zurück") während einer Periode. Damit erhalten wir

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{d\lambda}{dt}\frac{\oint \frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p}\, dq}{\oint \frac{dq}{\partial H/\partial p}} \,. \tag{32,2}$$

Wie schon erwähnt müssen die Integrationen in dieser Formel entlang der Bahn der Bewegung bei gegebenem konstantem Wert von λ ausgeführt werden. Längs einer solchen Bahn bleibt die HAMILTON-Funktion konstant gleich E und der Impuls stellt eine bestimmte Funktion der veränderlichen Koordinate q und der beiden unabhängigen konstanten Parameter E und λ dar. Indem wir den Impuls nun als eine solche Funktion $p(q; E, \lambda)$ auffassen, und die Gleichung $H(p, q; \lambda) = E$ nach dem Parameter λ differenzieren, erhalten wir

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$$

oder

$$\frac{\partial H/\partial \lambda}{\partial H/\partial p} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda}.$$

Wenn wir dies in das obere Integral in (32,2) einsetzen und im unteren den Integranden als $\partial p/\partial E$ schreiben, so ergibt sich

$$\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} = -\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\frac{\oint \frac{\partial p}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}q}{\oint \frac{\partial p}{\partial E}\,\mathrm{d}q} \tag{32,3}$$

oder

$$\oint \left(\frac{\partial p}{\partial E}\overline{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}} + \frac{\partial p}{\partial \lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}q = 0\,.$$

Diese Gleichung läßt sich schließlich auf die Form

$$\overline{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}} = 0 \tag{32,4}$$

bringen, wo I das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\,\mathrm{d}q \tag{32,5}$$

bedeutet, das entlang der Bahn bei vorgegebenen E und λ zu nehmen ist. Dieses Ergebnis besagt, daß die Größe I in der betrachteten Näherung bei Änderung des Parameters λ konstant bleibt, also eine adiabatische Invariante darstellt.

Dem Integral (32,5) kann man einen anschaulichen geometrischen Sinn geben, wenn man den Begriff der Phasentrajektorie des Systems, der Kurve, die die Abhängigkeit p von q beschreibt, benutzt. Für periodische Bewegungen ausführende Systeme ist die Phasentrajektorie eine geschlossene Kurve. Das Integral (32,5) längs dieser Kurve ist gleich der von ihr eingeschlossenen Fläche.

Als Beispiel wollen wir die adiabatische Invariante des eindimensionalen Oszillators bestimmen. Seine HAMILTON-Funktion lautet

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\,\omega^2 q^2}{2}\,,$$

wo ω die Eigenfrequenz des Oszillators ist. Die Gleichung der Phasenbahn ergibt sich aus dem Erhaltungssatz der Energie $H(p, q) = E$. Sie stellt eine Ellipse mit den Halbachsen $\sqrt{2\,m\,E}$ und $\sqrt{2\,E/m\,\omega^2}$ und der (durch $2\,\pi$ geteilten) Fläche

$$I = \frac{E}{\omega} \tag{32,6}$$

dar. Die adiabatische Invarianz dieser Größe bedeutet, daß sich die Energie bei langsamer Änderung der Parameter des Oszillators proportional zur Frequenz ändert.

Das Relativitätsprinzip VIII

§ 33. Die Geschwindigkeit der Wirkungsausbreitung

Die Wechselwirkung materieller Teilchen wird in der klassischen Mechanik durch die potentielle Energie beschrieben, die eine Funktion der Teilchenkoordinaten ist. Es ist klar, daß diese Methode der Wechselwirkungsbeschreibung die Voraussetzung der unendlich schnellen Ausbreitung der Wirkung enthält. Die auf jedes Teilchen von den anderen ausgeübten Kräfte hängen nach dieser Beschreibung nur von der Lage der Teilchen zum gegebenen Zeitpunkt ab. Eine Änderung der Lage irgendeines Teilchens wirkt im gleichen Augenblick auf die anderen Teilchen.

Es gibt jedoch, wie Versuche zeigen, in der Natur keine augenblicklichen Wechselwirkungen. Daher ist auch eine Mechanik, die auf der unendlich schnellen Ausbreitung der Wirkung beruht, unexakt. Tatsächlich zeigt sich der Einfluß der Veränderung eines Körpers auf einen mit ihm in Wechselwirkung stehenden anderen erst nach Ablauf einer gewissen Zeitspanne. Teilen wir die Entfernung der Körper durch dieses Zeitintervall, so ergibt sich die *Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung*.

Streng genommen müßten wir eine solche Geschwindigkeit als Maximalgeschwindigkeit der Wirkungsausbreitung bezeichnen. Sie bestimmt nur das Zeitintervall, nach dessen Ablauf das erste *Signal* zu einem Körper gelangen kann, das von der eingetretenen Änderung an einem anderen Körper Kunde gibt. Es ist offensichtlich, daß die Annahme einer Grenzgeschwindigkeit für die Ausbreitung der Wirkung gleichzeitig bedeutet, daß generell in der Natur die Bewegung von Körpern mit größerer Geschwindigkeit als dieser unmöglich ist.

Aus dem Relativitätsprinzip folgt, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung, wie ein Naturgesetz, in allen Inertialsystemen dieselbe ist, d. h., sie stellt sich als eine universelle Konstante dar.

Wie im weiteren gezeigt wird, ist diese konstante Geschwindigkeit nichts anderes als die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vakuum. Wir werden sie daher *Lichtgeschwindigkeit* nennen. Sie wird gewöhnlich mit dem Buchstaben c bezeichnet. Ihr Zahlenwert ist

$$c = 2{,}998 \cdot 10^{10}\ \mathrm{cm/s}\,. \tag{33,1}$$

Durch die Größe dieses Wertes wird die Tatsache erklärt, daß man in der Praxis in der Mehrzahl aller Fälle mit der klassischen Mechanik auskommt. Die Geschwindigkeiten, mit denen wir es gewöhnlich zu tun haben, sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit so klein, daß die Annahme einer unendlichen

Lichtgeschwindigkeit die Genauigkeit der Ergebnisse praktisch nicht beeinflußt.

Das Relativitätsprinzip zusammen mit dem Prinzip einer endlichen Wirkungsgeschwindigkeit wird EINSTEIN*sches Relativitätsprinzip* genannt (es wurde von EINSTEIN 1905 formuliert), im Unterschied zum GALILEIschen Relativitätsprinzip, das auf der Annahme einer unendlichen Geschwindigkeit der Ausbreitung der Wirkung beruht.

Die auf dem EINSTEINschen Relativitätsprinzip (das wir kurz Relativitätsprinzip nennen werden) basierende Mechanik heißt *relativistische Mechanik*. In dem Grenzfall, wo die Geschwindigkeiten der bewegten Körper klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, kann der Einfluß der endlichen Wirkungsgeschwindigkeit auf die Bewegung vernachlässigt werden. Dann geht die relativistische Mechanik in die gewöhnliche Mechanik über, die die Annahme einer sofortigen Wirkungsausbreitung enthält. Diese gewöhnliche Mechanik wird auch als NEWTONsche oder klassische Mechanik bezeichnet. Der Grenzübergang von der relativistischen zur klassischen Mechanik erfolgt formal dadurch, daß wir in den Formeln der ersteren $c \to \infty$ gehen lassen.

Schon in der klassischen Mechanik ist der Raum in dem Sinne relativ, daß die räumlichen Beziehungen zwischen zwei Ereignissen davon abhängen, in welchem Bezugssystem sie beschrieben werden. Die Aussage, daß zwei nicht gleichzeitige Ereignisse im gleichen Raumpunkt oder allgemeiner in einer bestimmten Entfernung voneinander stattfinden, hat nur dann einen Sinn, wenn man das Bezugssystem angibt, auf das sich die Aussage bezieht.

Hingegen ist die Zeit in der klassischen Mechanik eine absolute Größe: Ihre Eigenschaften hängen nicht vom Bezugssystem ab, sie ist für alle Systeme dieselbe. Dies bedeutet, daß zwei für irgendeinen Beobachter gleichzeitige Erscheinungen auch für alle anderen Beobachter gleichzeitig sind. Allgemein ist das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen für alle Bezugssysteme dasselbe.

Man überzeugt sich jedoch leicht davon, daß der Begriff der absoluten Zeit in völligem Widerspruch zum EINSTEINschen Relativitätsprinzip steht. Dazu genügt es schon, sich an das in der klassischen Mechanik geltende allgemein bekannte Additionsgesetz der Geschwindigkeiten zu erinnern, nach dem die Geschwindigkeit einer zusammengesetzten Bewegung gleich der (vektoriellen) Summe der Einzelgeschwindigkeiten ist. Als universelles Gesetz hätte es auch für Wirkungsausbreitung zu gelten. Daraus würde aber folgen, daß die Wirkungsgeschwindigkeit für verschiedene Inertialsysteme verschieden wäre, und dies widerspricht dem Relativitätsprinzip.

Das Relativitätsprinzip wird in dieser Beziehung vom Experiment durchaus bestätigt. Durch zuerst von MICHELSON (1881) ausgeführte Messungen wurde festgestellt, daß die Lichtgeschwindigkeit von der Ausbreitungsrichtung des Lichtes völlig unabhängig ist; nach der klassischen Mechanik dagegen sollte sie in Richtung der Erdbewegung kleiner sein als in der entgegengesetzten Richtung.

Das Relativitätsprinzip führt also zu dem Ergebnis, daß die Zeit nicht als absolut anzusehen ist. Sie läuft in verschiedenen Bezugssystemen verschieden schnell ab. Eine Aussage, daß zwischen zwei Ereignissen ein bestimmtes Zeit-

intervall liegt, hat also nur dann einen Sinn, wenn auch gleichzeitig das Bezugssystem angegeben wird, auf das sich die Aussage bezieht. Sind z. B. in einem Bezugssystem zwei Ereignisse gleichzeitig, so werden sie es in einem anderen nicht mehr sein.

Um dies zu erläutern, ist das folgende einfache Beispiel nützlich. Wir betrachten zwei Inertialsysteme K und K' mit den entsprechenden Koordinatenachsen $x\ y\ z$ und $x'y'z'$. Das System K' bewege sich relativ zu K nach rechts längs der Achsen x und x' (Abb. 28).

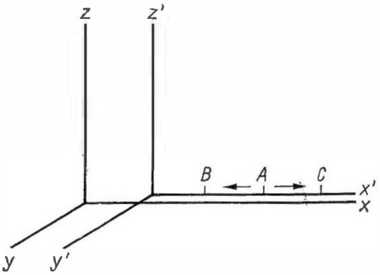


Abb. 28

Von irgendeinem Punkt A auf der x'-Achse werden Signale in zwei entgegengesetzte Richtungen ausgesandt. Da, wie in jedem Inertialsystem, die Signalgeschwindigkeit im System K' (in beiden Richtungen) gleich c ist, so werden, gemessen im System K', die von A aus in gleicher Entfernung befindlichen Punkte B und C von den Signalen in gleicher Zeit erreicht. Man sieht jedoch leicht, daß diese beiden Ereignisse der Ankunft des Signales in B bzw. C für einen Beobachter im System K keineswegs gleichzeitig sind. Da nämlich die Signalgeschwindigkeit bezüglich K nach dem Relativitätsprinzip ebenfalls gleich c ist und sich der Punkt B (relativ zum System K) dem Signal entgegen, der Punkt C sich dagegen von dem nach ihm abgesandten Signal fort bewegt, muß im Koordinatensystem K der Punkt B früher als C von einem Signal erreicht werden.

Das Einsteinsche Relativitätsprinzip modifiziert so in tiefgehender und fundamentaler Weise die grundlegenden physikalischen Begriffe. Die Vorstellung über Raum und Zeit, die wir aus der alltäglichen Erfahrung gewinnen, gilt nur näherungsweise. Dies hängt damit zusammen, daß die im gewöhnlichen Leben auftretenden Geschwindigkeiten äußerst klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind.

§ 34. Der Abstand

Im folgenden werden wir häufig den Begriff eines *Ereignisses* verwenden. Ein Ereignis ist gekennzeichnet durch den Ort, an dem es stattfindet, und durch den Zeitpunkt, zu dem es geschieht. Ein auf ein Materieteilchen bezügliches

Ereignis ist also durch die drei Teilchenkoordinaten und einen bestimmten Zeitwert, zu dem das Ereignis stattfindet, definiert.

Oft ist es bequem und anschaulich, einen fiktiven vierdimensionalen Raum einzuführen, dessen Achsen die drei Raumkoordinaten und die Zeit bilden. In diesem Raum sind die Ereignisse Punkte, *Weltpunkte* genannt. Jedem Teilchen entspricht in diesem Raum eine bestimmte Linie (*Weltlinie*). Die Punkte dieser Linien definieren die Teilchenkoordinaten zu jedem Zeitpunkt. Man überlegt sich leicht, daß ein sich gleichförmig und geradlinig bewegender Massenpunkt eine Gerade als Weltlinie besitzt.

Wir formulieren nun das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit mathematisch. Dazu betrachten wir zwei Bezugssysteme K und K', die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Die Koordinatenachsen wählen wir so, daß x mit x' zusammenfällt und y, z zu y', z' parallel sind. Die Zeiten in K und K' bezeichnen wir mit t und t'.

Es werde nun ein erstes Ereignis betrachtet, das darin bestehe, daß vom Punkt mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 im System K zum Zeitpunkt t_1 (wieder im System K) ein Signal mit Lichtgeschwindigkeit ausgesandt wird. Wir wollen die Ausbreitung dieses Signals im System K verfolgen. Ein zweites Ereignis bestehe darin, daß das Signal zur Zeit t_2 zum Punkt x_2, y_2, z_2 gelangt. Da sich das Signal mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, hat es die Entfernung $c\,(t_2 - t_1)$ zurückgelegt. Andererseits ist diese Entfernung gleich $[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}$. Zwischen den Koordinaten der beiden Ereignisse im System K besteht also die Abhängigkeit

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2\,(t_2 - t_1)^2 = 0\,. \tag{34,1}$$

Die beiden eben betrachteten Ereignisse kann man auch vom System K' aus beobachten. In K' seien die Koordinaten des ersten Ereignisse x_1', y_1', z_1', t_1', die des zweiten} x_2', y_2', z_2', t_2'. Da wegen der Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem diese in K und K' gleich ist, gilt analog zu (34,1)

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2\,(t_2' - t_1')^2 = 0\,. \tag{34,2}$$

Allgemein definieren wir: Sind x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 die Koordinaten von zwei beliebigen Ereignissen, so heißt die Größe

$$s_{12} = [c^2\,(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \tag{34,3}$$

Abstand zwischen diesen beiden Ereignissen.

Aus dem Prinzip der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit folgt also: Verschwindet der Abstand zwischen zwei Ereignissen in einem Bezugssystem, so auch in allen anderen.

Sind zwei Ereignisse einander unendlich benachbart, so ist der Abstand $\mathrm{d}s$ zwischen ihnen

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2\,. \tag{34,4}$$

Die Form der Ausdrücke (34,3) und (34,4) gestattet von einem rein formalen mathematischen Standtpunk die Betrachtung des Abstandes als Abstand zwi-

schen zwei Punkten in einem vierdimensionalen Raum (dessen Achsen x, y, z und das Produkt $c\,t$ sind). Es gibt jedoch einen wesentlichen Unterschied bei der Berechnung dieser Größe im Vergleich mit den Regeln der gewöhnlichen Geometrie: bei der Bildung des Quadrates des Abstandes werden die Quadrate der Koordinatenabstände der verschiedenen Achsen nicht mit einheitlichen sondern mit verschiedenen Vorzeichen summiert[1]).

Oben wurde gezeigt, daß aus $\mathrm{d}s = 0$ in einem bestimmten Inertialsystem $\mathrm{d}s' = 0$ in einem anderen System folgt. Andererseits sind $\mathrm{d}s$ und $\mathrm{d}s'$ unendlich kleine Größen gleicher Ordnung. Aus diesen beiden Tatsachen folgt, daß $\mathrm{d}s^2$ und $\mathrm{d}s'^2$ proportional zueinander sein müssen:

$$\mathrm{d}s^2 = a \cdot \mathrm{d}s'^2 .$$

Hierbei kann der Koeffizient a nur vom Absolutwert der Relativgeschwindigkeit der beiden Inertialsysteme abhängen. Er kann nicht von den Koordinaten und der Zeit abhängen, weil dann verschiedene Raum- und Zeitpunkte untereinander nicht mehr gleichwertig wären, was der Homogenität von Raum und Zeit widerspricht. Er kann auch nicht von der Richtung der Relativgeschwindigkeit abhängen, weil dies der Isotropie des Raumes widersprechen würde.

Wir betrachten drei Bezugssysteme K, K_1, K_2. V_1, V_2 seien die Geschwindigkeiten von K_1 bzw. K_2 relativ zu K. Dann haben wir

$$\mathrm{d}s^2 = a(V_1)\,\mathrm{d}s_1^2, \qquad \mathrm{d}s^2 = a(V_2)\,\mathrm{d}s_2^2 .$$

Aus gleichem Grunde kann man schreiben

$$\mathrm{d}s_1^2 = a(V_{12})\,\mathrm{d}s_2^2 ,$$

wo V_{12} der Absolutwert der Relativgeschwindigkeit von K_2 bezüglich K_1 ist. Aus dem Vergleich dieser Beziehungen finden wir, daß

$$\frac{a(V_2)}{a(V_1)} = a(V_{12}) \tag{34,5}$$

gelten muß. V_{12} hängt nicht nur von den Absolutwerten der Vektoren $\boldsymbol{V}_1$ und $\boldsymbol{V}_2$ ab, sondern auch von dem Winkel zwischen ihnen. Letzterer geht indessen in den linken Teil von (34,8) nicht ein. Es ist also klar, daß diese Beziehung nur dann gelten kann, wenn die Funktion $a(V)$ gleich einer Konstanten ist, die, wie aus denselben Gleichungen folgt, gleich 1 sein muß.

Es ist somit

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$$

und aus der Gleichheit unendlich kleiner Abstände folgt auch die endlicher Abstände: $s = s'$.

Wir gelangen so zu einem äußerst wichtigen Ergebnis: Der Abstand zwischen zwei Ereignissen ist in allen Inertialsystemen gleich, ist also eine Invariante

[1]) Die durch die quadratische Form (34,4) bestimmte vierdimensionale Geometrie wurde im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie von MINKOWSKI eingeführt. Man nennt sie *pseudoeuklidisch*.

bezüglich der Transformationen von einem Inertialsystem zu einem beliebigen anderen. Diese Invarianz ist der mathematische Ausdruck für die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Es seien wieder x_1, y_1, z_1, t_1 und x_2, y_2, z_2, t_2 die Koordinaten zweier Ereignisse in irgendeinem Bezugssystem K. Gibt es dann ein Bezugssystem K', in dem diese beiden Ereignisse an ein und demselben Raumpunkt stattfinden?

Wir führen die Bezeichnungen

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \qquad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2$$

ein. Dann ist der Abstand zwischen den beiden Ereignissen im System K:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$$

und im System K':

$$s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2,$$

wobei wegen der Invarianz des Abstandes

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$$

gilt. Wir verlangen, daß im System K' beide Ereignisse an einem Punkte vor sich gehen, d. h., daß $l_{12}' = 0$. Dann muß

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0$$

gelten.

Ein Bezugssystem mit den geforderten Eigenschaften gibt es also, wenn $s_{12}^2 > 0$ gilt, d. h. der Abstand zwischen den beiden Ereignissen reell ist. Reelle Abstände bezeichnet man als *zeitartige*.

Ist daher der Abstand zwischen zwei Ereignissen zeitartig, so gibt es ein Bezugssystem, in dem die beiden Ereignisse am gleichen Orte stattfinden. Die Zeit, die in diesem System zwischen den beiden Ereignissen vergeht, beträgt

$$t_{12}' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} = \frac{s_{12}}{c}. \tag{34,6}$$

Finden zwei Ereignisse an ein und demselben Körper statt, so ist der Abstand zwischen ihnen immer zeitartig. In der Tat kann der Weg, den der Körper zwischen den beiden Ereignissen zurücklegt, nicht größer als $c\,t_{12}$ sein, da die Geschwindigkeit des Körpers c nicht übersteigen darf. Es gilt also immer

$$l_{12} < v\,t_{12}.$$

Wir stellen uns nun die Frage, ob sich nicht ein solches Koordinatensystem finden läßt, in dem zwei Ereignisse zum gleichen Zeitpunkt stattfinden. Wie früher haben wir für die Systeme K und K' $c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$. Unsere Forderung $t_{12}' = 0$ führt zu

$$s_{12}^2 = -\,l_{12}'^2 < 0.$$

Das gesuchte Koordinatensystem läßt sich also nur finden, wenn der Abstand zwischen den Ereignissen imaginär ist. Imaginäre Abstände heißen *raumartig*.

Besteht demnach zwischen zwei Ereignissen ein raumartiger Abstand, so gibt es ein Bezugssystem, in dem beide Ereignisse gleichzeitig sind. Die Entfernung der Punkte, in denen die Ereignisse stattfinden, ist in diesem Bezugssystem durch

$$l'_{12} = \sqrt{l_{12}^2 - c^2\, t_{12}^2} = s_{12} \tag{34,7}$$

gegeben.

Die Unterteilung der Abstände in zeitartige und raumartige ist wegen ihrer Invarianz von absoluter Bedeutung. Dies soll heißen, daß die Eigenschaft eines Abstands, raumartig oder zeitartig zu sein, nicht vom Koordinatensystem abhängt.

Wir wählen ein beliebiges Ereignis, das wir Ereignis O nennen wollen, als Anfangspunkt der Raum- und Zeitkoordinaten. Dies bedeutet mit anderen Worten, der Weltpunkt „Ereignis O" ist der Ausgangspunkt des vierdimensionalen Koordinatensystems, auf dessen Achsen x, y, z und t abgetragen werden. Wir untersuchen nun, in welcher Beziehung die anderen Ereignisse zu dem ausgewählten Ereignis O stehen. Zur Vereinfachung werden wir nur eine räumliche Koordinate und die Zeit betrachten und sie auf zwei Achsen abtragen (Abb. 29). Ein geradlinig und gleichförmig bewegtes Teilchen, das den Punkt $x = 0$ zur Zeit $t = 0$ passiert, wird als gerade Linie abgebildet, die durch O geht und mit der t-Achse einen Winkel bildet, dessen Tangens gleich der Geschwindigkeit des Teilchens ist. Da nun die höchstmögliche Geschwindigkeit c ist, gibt es auch einen größten Winkel, den die entsprechende Gerade mit der t-Achse bildet. Auf Abb. 29 sind zwei Geraden eingezeichnet, die die Ausbreitung zweier Signale (mit Lichtgeschwindigkeit) in entgegengesetzte Richtungen darstellen und die

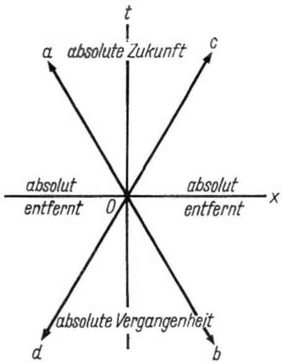


Abb. 29

durch das Ereignis O gehen, d. h. für die $x = 0$ für $t = 0$ ist. Geraden, die die Bewegung von Teilchen darstellen, können nur innerhalb der Gebiete aOc und dOb liegen. Auf den Achsen ab und cd gilt offenbar $x = \pm\, c\, t$. Wir betrachten zunächst Ereignisse, deren Weltpunkte innerhalb des Gebietes aOc liegen. Man überlegt sich leicht, daß für alle diese Punkte $c^2 t^2 - x^2 > 0$ gilt. Der Abstand

zwischen den Ereignissen dieses Gebietes und dem Ereignis O ist also zeitartig. In diesem Gebiet ist $t > 0$, d. h., die dortigen Ereignisse geschehen „nach“ dem Ereignis O. Nun können zwei Ereignisse, die durch einen zeitartigen Abstand getrennt sind, in keinem Bezugssystem zur gleichen Zeit stattfinden. Man kann also kein Bezugssystem finden, in dem ein Ereignis aus dem Gebiete aOc „vor“ dem O-Ereignis stattfinden würde, für das also $t < 0$ gälte. Alle Ereignisse des Gebietes aOc liegen also bezüglich O in der Zukunft; dies gilt für alle Bezugssysteme. In bezug auf das Ereignis O kann man dieses Gebiet als „absolute Zukunft“ bezeichnen.

In gleicher Weise sind alle Ereignisse des Gebietes bOd bezüglich O „absolute Vergangenheit“, d. h., sie finden in allen Bezugssystemen vor dem Ereignis O statt.

Wir betrachten schließlich noch die Gebiete dOa und cOb. Der Abstand zwischen einem Ereignis dieses Gebietes und O ist raumartig. In jedem Bezugssystem finden diese Ereignisse an verschiedenen Orten des Raumes statt. Man kann sie daher bezüglich O „absolut entfernt“ nennen. Die Begriffe „gleichzeitig“, „früher“ und „später“ sind für diese Ereignisse jedoch relativ. Es gibt stets Bezugssysteme, in denen sie früher oder später als O stattfinden und jeweils ein System, in dem ein Ereignis dieser Gebiete mit O gleichzeitig ist.

Betrachten wir alle drei räumlichen Koordinaten anstelle einer einzigen, so haben wir statt der zwei sich kreuzenden Geraden in Abb. 29 in dem vierdimensionalen Koordinatensystem x, y, z, t einen „Kegel“ $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$, dessen Achse mit der t-Achse zusammenfällt (man nennt ihn den „Lichtkegel“). Die Gebiete der „absoluten Zukunft“ und „absoluten Vergangenheit“ entsprechen zwei den Innenbereichen dieses Kegels.

Zwei Ereignisse können miteinander nur dann kausal verbunden sein, wenn der Abstand zwischen ihnen zeitartig ist. Dies folgt unmittelbar daraus, daß sich keine Wirkung mit einer Geschwindigkeit ausbreiten kann, die größer als die des Lichtes ist. Wie wir eben sahen, hat es gerade für solche Ereignisse einen absoluten Sinn, von „früher“ und „später“ zu sprechen und dies ist eine notwendige Bedingung dafür, daß die Begriffe Ursache und Wirkung sinnvoll sind.

§ 35. Die Eigenzeit

Wir nehmen an, daß wir von irgendeinem Inertialsystem K aus eine Uhr beobachten, die sich ganz beliebig relativ zu uns bewegen möge. Wir führen ein weiteres Inertialsystem K' ein, das sich relativ zu K mit einer Geschwindigkeit bewegt, die mit der Geschwindigkeit v der Bewegung der Uhr im gegebenen Zeitpunkt zusammenfällt.

Während des infinitesimalen Zeitabschnittes $\mathrm{d}t$ (gemessen mit einer unbewegten, d. h. mit uns verbundenen Uhr) lege die bewegte Uhr die Strecke

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$$

zurück. Gefragt wird, welches Zeitintervall dt' sie danach anzeigt. Da sie in dem mit ihr verbundenen Koordinatensystem K' ruht, ist $dx' = dy' = dz' = 0$. Infolge der Invarianz des Abstandes gilt

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\, dt'^2 ,$$

woraus

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2\, dt^2}}$$

folgt. Nun ist aber

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

das Quadrat der Geschwindigkeit der bewegten Uhr. Damit haben wir

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \tag{35,1}$$

Integrieren wir diesen Ausdruck, so läßt sich das Zeitintervall finden, das die bewegte Uhr anzeigt, wenn auf der unbewegten Uhr die Zeit $t_2 - t_1$ vergeht:

$$t_2' - t_1' = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \tag{35,2}$$

Eine Zeit, die von einer Uhr festgestellt wird, die sich mit einem gegebenen Gegenstand bewegt, wird *Eigenzeit* dieses Gegenstandes genannt. Die Formeln (35,1) und (35,2) drücken die Eigenzeit durch die Zeit desjenigen Bezugssystems aus, von dem aus die Bewegung betrachtet wird.

Wie aus (35,1) oder (35,2) ersichtlich ist, ist die Eigenzeit eines sich bewegenden Gegenstandes immer kleiner als das entsprechende Zeitintervall im unbewegten System. Mit anderen Worten, eine bewegte Uhr langsamer als eine unbewegte.

In bezug auf das Inertialsystem K möge sich eine andere Uhr geradlinig und gleichförmig bewegen. Das mit ihr verbundene Bezugssystem K' ist ebenfalls ein Inertialsystem. Dann bleibt die Uhr in K' vom Standpunkte des Beobachters im System K zurück. Umgekehrt geht aber auch die Uhr in K, vom System K' aus beurteilt, im Vergleich zur Uhr in K' nach. Um sich zu überzeugen, daß kein Widerspruch vorliegt, beachte man folgenden Umstand. Um festzustellen. daß die Uhr im System K' relativ zu der in K nachgeht, muß folgendermaßen verfahren werden. Zu irgendeinem Zeitpunkt möge die Uhr in K' an der Uhr von K vorbeifliegen; die Zeigerstellungen beider Uhren seien dabei gleich. Um den Gang der beiden Uhren vergleichen zu können, hat man ein zweites Mal die relative Stellung der Zeiger der bewegten Uhr K' und der in K ruhenden Uhr festzustellen. Diesen Vergleich können wir mit anderen in K ruhenden Uhren durchführen, nämlich mit denen, an denen die Uhr K' zu späteren Zeitpunkten vorbeifliegt. Dabei stellen wir fest, daß die Uhr K' relativ zu den Vergleichsuhren in K zurückbleibt. Man sieht, daß zum Vergleich des Ganges von Uhren

in zwei Bezugssystemen mehrere Uhren in einem und eine Uhr in dem anderen System nötig sind. Der ganze Vorgang ist also nicht symmetrisch bezüglich beider Systeme. Es bleibt immer diejenige Uhr zurück, die mit verschiedenen Uhren im anderen System verglichen wird.

Haben wir zwei Uhren, von denen eine eine geschlossene Bahn beschreibt, d. h. zu ihrem Ausgangspunkt, der unbewegten Uhr, zurückkehrt, so wird die bewegte Uhr im Vergleich zur unbewegten zurückbleiben. Die umgekehrte Überlegung, bei der man die bewegte Uhr als ruhend ansieht, ist hier nicht möglich, da eine Uhr, die eine geschlossene Bahn beschreibt, sich nicht mehr geradlinig und gleichförmig bewegt, so daß ein mit ihr verbundenes Bezugssystem kein Inertialsystem mehr ist. Da nun die Naturgesetze nur in Inertialsystemen in gleicher Weise formuliert sind, besitzen Bezugssysteme, die mit unbeschleunigt bewegten Uhren verbunden sind (d. h. Inertialsysteme), andere Eigenschaften als diejenigen, die zu beschleunigt bewegten Uhren gehören (Nichtinertialsysteme). Die Überlegungen, die zu dem Ergebnis führen, daß eine ruhende Uhr nachgehen sollte, sind also falsch.

§ 36. Die Lorentz-Transformation

Unser Ziel ist es jetzt, die Transformationsformel von einem Inertialsystem in ein anderes aufzustellen, d. h. eine Formel zu finden, die es uns gestattet, aus den Koordinaten x, y, z, t eines Ereignisses in irgendeinem Bezugssystem K die Koordinaten x', y', z', t' desselben Ereignisses in einem anderen Inertialsystem K' zu berechnen.

In der klassischen Mechanik wurde diese Frage mit den einfachen Formeln der Galilei-Transformation (3,1 — 2) gelöst. Bewegt sich das System K' relativ zu dem System K längs der gemeinsamen Achsenrichtung x und x', so haben diese Formeln die Gestalt

$$x = x' + V t', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{36,1}$$

Diese Transformation genügt natürlich nicht den Forderungen der Relativitätstheorie, sie läßt den Abstand zwischen Ereignissen nicht invariant.

Die relativistischen Transformationsformeln werden wir aus der Forderung ableiten daß sie den Abstand invariant lassen müssen.

Wie wir in § 34 sahen, läßt sich der Abstand zwischen zwei Ereignissen als Entfernung zwischen den zwei entsprechenden Weltpunkten im vierdimensionalen Koordinatensystem auffassen. Wir können also sagen, daß die gesuchte Transformation alle Längen im vierdimensionalen Raum $x, y, z, c \cdot t$ ungeändert lassen muß. Solche Transformationen sind aber nur Parallelverschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems. Davon sind die Parallelverschiebungen des Koordinatensystems uninteressant, da sie nur die Lage des Ursprungs der räumlichen Koordinaten und den Anfangspunkt der Zeitskala ändern. Die gesuchte Transformation muß sich daher als Rotation des vierdimensionalen Koordinatensystems x, y, z, $c \cdot t$ mathematisch darstellen lassen.

Jede Drehung in einem vierdimensionalen Raum kann man in sechs Einzeldrehungen in den Ebenen xy, zy, xz, tx, ty, tz zerlegen, ebenso wie jede Rotation im gewöhnlichen Raum in drei Drehungen in den Ebenen xy, zy und xz zerlegbar ist. Die ersten drei dieser Drehungen transformieren nur die räumlichen Koordinaten, sie entsprechen gewöhnlichen räumlichen Drehungen.

Wir betrachten eine Drehung in der tx-Ebene; die Koordinaten y und z ändern sich dabei nicht. Diese Transformation muß speziell den Abstand $(c \cdot t)^2 - x^2$, das Quadrat des *Abstandes* vom Punkt $c \cdot t$, x zum Koordinatenursprung, unverändert lassen. Der Zusammenhang zwischen den alten und den neuen Koordinaten hat bei dieser Transformation die folgende allgemeine Form:

$$x = x' \operatorname{ch} \psi + c\, t' \operatorname{sh} \psi \,, \qquad c\, t = x' \operatorname{sh} \psi + c\, t' \operatorname{ch} \psi \,, \tag{36,2}$$

wobei ψ der *Drehwinkel* ist. Von der Gültigkeit der Gleichheit $(c\,t)^2 - x^2 = (c\,t')^2 - x'^2$ überzeugt man sich dabei leicht. Die Formeln (36,2) unterscheiden sich von den gewöhnlichen Transformationsformeln einer Drehung der Koordinatenachsen durch den Ersatz der trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische. Hierin äußert sich der Unterschied der pseudoeuklidischen Geometrie von der euklidischen.

Wir suchen nun die Transformationsformeln von einem Inertialsystem K zum System K', das sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit V entlang der x-Achse bewegt. Dabei werden offensichtlich nur die Koordinate x und die Zeit t transformiert. Deswegen muß diese Transformation die Gestalt (36,2) haben. Es muß nur noch der Winkel ψ bestimmt werden, der nur von der Relativgeschwindigkeit V abhängen kann[1]).

Wir betrachten im System K die Bewegung des Koordinatenursprunges des Bezugssystems K'. Dann ist $x' = 0$ und (36,2) nimmt die Gestalt

$$x = c\, t' \operatorname{sh} \psi \,, \qquad c\, t = c\, t' \operatorname{ch} \psi \,,$$

an. Durch Division erhalten wir

$$\frac{x}{c\,t} = \operatorname{th} \psi \,.$$

x/t ist aber offensichtlich die Geschwindigkeit V des Systems K' relativ zu K. Also ist

$$\operatorname{th} \psi = \frac{V}{c} \,.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{sh} \psi = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \,, \qquad \operatorname{ch} \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \,.$$

[1]) Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei bemerkt, daß wir mit V immer die konstante Relativgeschwindigkeit zweier Inertialsysteme bezeichnen, mit v dagegen eine Teilchengeschwindigkeit, die nicht unbedingt konstant zu sein braucht.

Wenn wir dies in (36,2) einsetzen. erhalten wir

$$x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{36,3}$$

Das sind die gesuchten Transformationsformeln. Sie werden als die Formeln der LORENTZ-Transformation bezeichnet und haben für das weitere fundamentale Bedeutung.

Die Umkehrformeln, die x', y', z', t' durch x, y, z, t ausdrücken, erhält man am einfachsten durch den Ersatz von V durch $-V$, da sich das System K' relativ zu K mit der Geschwindigkeit $-V$ bewegt. Diese Formeln kann man auch unmittelbar durch Auflösen der Gleichungen (36,3) nach x', y', z', t' erhalten.

Aus (36,3) kann man leicht sehen, daß beim Grenzübergang $c \to \infty$ zur klassischen Mechanik die Formeln der LORENTZ-Transformation tatsächlich in die der GALILEI-Transformation übergehen.

Bei $V > c$ werden die Koordinaten x, t inden Formeln (36,3) imaginär. Dies entspricht der Tatsache, daß eine Bewegung mit einer Geschwindigkeit, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist, unmöglich ist. Die Benutzung eines Bezugssystems, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, ist ebenfalls unmöglich. Dabei würden die Nenner in den Formeln (36,3) Null werden.

Im System K befinde sich ein ruhender Maßstab parallel zur x-Achse. Seine in diesem System gemessene Länge sei $\Delta x = x_2 - x_1$ (x_2 und x_1 sind die Koordinaten der Enden des Stabes im System K). Wir wollen die im System K' gemessene Länge des Maßstabes feststellen und haben dazu die Koordinaten seiner beiden Endpunkte (x_2', x_1') in K' zu ein und demselben Zeitpunkt t' zu bestimmen. Aus (36,3) folgt

$$x_1 = \frac{x_1' + V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad x_2 = \frac{x_2' + V t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Die Stablänge in K' ist $\Delta x' = x_2' - x_1'$; durch Subtraktion finden wir

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

„Eigen(oder Ruh-)länge“ eines Stabes wird die in seinem Ruhsystem gemessene Länge genannt. Bezeichnen wir sie mit $l_0 = \Delta x$ und die in einem beliebigen Bezugssystem K' beurteilte Länge mit l, so haben wir

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{36,4}$$

Seine größte Länge hat also der Stab in seinem Ruhsystem. In einem System, in dem er sich mit der Geschwindigkeit V bewegt, verkleinert sie sich um den

Faktor $\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Diese Folgerung aus der Relativitätstheorie wird als Lorentz-*Kontraktion* bezeichnet.

Da sich bei der Bewegung alle senkrecht zur Bewegungsrichtung befindlichen Abmessungen des Körpers nicht ändern, verkleinert sich sein Volumen $\mathfrak{V}$ nach derselben Formel

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \qquad (36,5)$$

$\mathfrak{V}_0$ ist das „Eigenvolumen" des Körpers.

Aus der Lorentz-Transformation leitet man auch die uns schon bekannten Ergebnisse über die Eigenzeit (§ 35) ab. Im System K' ruhe eine Uhr. Wir wählen zwei Ereignisse, die im System K' am gleichen Ort x', y', z' geschehen und zwischen denen ein Zeitunterschied $\Delta t' = t_2' - t_1'$ besteht. Gesucht wird die Zeit Δt, die im Bezugssystem K zwischen diesen beiden Ereignissen vergeht. Aus (36,3) folgt

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad t_2 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

oder nach Subtraktion

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

in Übereinstimmung mit (35,1).

§ 37. Transformation der Geschwindigkeit

Im letzten Paragraphen fanden wir Gleichungen, mit denen wir aus den Koordinaten eines Ereignisses in einem Bezugssystem die Koordinaten desselben Ereignisses in anderen Bezugssystemen berechnen konnten. Hier suchen wir Formeln, die die Geschwindigkeit bewegter Teilchen in verschiedenen Bezugssystemen verknüpfen.

Es bewege sich wieder das System K' relativ zum System K mit der Geschwindigkeit V längs der x-Achse. $v_x = \frac{dx}{dt}$ sei die Geschwindigkeitskomponente eines Teilchens im System K, $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$ die entsprechende Komponente desselben Teilchens im System K'. (36,3) liefert

$$dx = \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad dy = dy', \qquad dz = dz', \qquad dt = \frac{dt' + \frac{V^2}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Teilen wir die ersten drei Gleichungen durch die vierte, und führen die Geschwindigkeiten

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \qquad \boldsymbol{v}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

ein, so finden wir

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}, \qquad v_y = \frac{v_y' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}}, \qquad v_z = \frac{v_z' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x' V}{c^2}} \cdot \tag{37,1}$$

Diese Gleichungen sind die gesuchte Transformation der Geschwindigkeit. Sie liefern uns gleichzeitig das relativistische Additionsgesetz der Geschwindigkeiten. Beim Grenzübergang $c \to \infty$ gehen sie in die Gleichungen $v_x = v_x' + V$, $v_y = v_y'$, $v_z = v_z'$ der klassischen Mechanik über.

Für den speziellen Fall, daß sich ein Teilchen parallel zur x-Achse bewegt, d. h. $v_x = v$, $v_y = v_z = 0$, erhalten wir $v_y' = v_z' = 0$ sowie $v_x' = v'$, wobei

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v' V}{c^2}} \tag{37,2}$$

gilt.

Man überzeugt sich leicht davon, daß die nach dieser Gleichung berechnete Summe zweier Geschwindigkeiten, die kleiner oder gleich der Lichtgeschwindigkeit sind, wieder eine Geschwindigkeit ergibt, die die Lichtgeschwindigkeit nicht übersteigt.

Wir wählen die Koordinatenachsen so, daß die Geschwindigkeit eines Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt in der xy-Ebene liegt. Die Komponenten seiner Geschwindigkeit sind dann $v_x = v \cos\theta$, $v_y = v \sin\theta$ im System K und $v_x' = v' \cos\theta'$, $v_y' = v' \sin\theta'$ im System K' (hierbei sind v, v' die Beträge und θ, θ' die Winkel, die die Geschwindigkeiten mit der x- und -x'-Achse in den Systemen K und K' bilden). Mit (37,1) finden wir

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin\theta'}{v' \cos\theta' + V}. \tag{37,3}$$

Diese Formel gibt die Richtungsänderung der Geschwindigkeit beim Übergang zu einem anderen Bezugssystem an.

Ein wichtiger Spezialfall dieser Formel beschreibt die Richtungsänderung des Lichtes beim Übergang zu einem anderen Bezugssystem, eine als *Aberration* des Lichtes bekannte Erscheinung. In diesem Falle ist $v = v' = c$ und (37,3) geht in

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\frac{V}{c} + \cos\theta'} \sin\theta' \tag{37,4}$$

über.

Ist $V \ll c$, so folgt aus (37,4) bis auf Glieder der Ordnung V/c:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta'\left(1 - \frac{V}{c\cos\theta'}\right).$$

Führen wir den Aberrationswinkel $\Delta\theta = \theta' - \theta$ ein, so finden wir mit derselben Genauigkeit

$$\Delta\theta = \frac{V}{c}\sin\theta' , \qquad (37,5)$$

also die bekannte Formel für die Aberration des Lichtes.

§ 38. Vierervektoren

Die Koordinaten ($c\,t$, x, y, z) eines Ereignisses können als Komponenten eines vierdimensionalen Radiusvektors (abgekürzt werden wir ihn als Viererradiusvektor bezeichnen) im vierdimenisonalen Raum aufgefaßt werden. Seine Komponenten werden wir mit x^μ bezeichnen, der Index μ durchläuft die Werte 0, 1, 2 und 3 mit

$$x^0 = c\,t\,, \qquad x^1 = x\,, \qquad x^2 = y\,, \qquad x^3 = z\,.$$

Das Quadrat der „Länge" des vierdimensionalen Radiusvektors ist durch

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

gegeben. Er ändert sich nicht bei beliebigen Drehungen des vierdimensionalen Koordinatensystems, zu denen insbesondere auch die LORENTZ-Transformationen gehören.

Allgemein wird als vierdimensionaler Vektor (Vierervektor) A^μ die Gesamtheit von vier Größen A^0, A^1, A^2, A^3, die sich bei Transformationen des vierdimensionalen Koordinatensystems so wie die Komponenten des Viererradiusvektors x^μ transformieren, bezeichnet[1]). Bei LORENTZ-Transformationen gilt speziell

$$A^0 = \frac{A'^0 + \frac{V}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad A^1 = \frac{A'^1 + \frac{V}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3\,. \qquad (38,1)$$

Das Quadrat der Länge jedes Vierervektors berechnet sich analog dem Quadrat der Länge des Viererradiusvektors:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2\,.$$

Um derartige Ausdrücke bequem aufschreiben zu können, werden zwei „Sorten"

[1]) In diesem Buch bezeichnen wir vierdimensionale Indizes, die die Werte 0, 1, 2 und 3 durchlaufen, mit griechischen Buchstaben λ, μ, ν . . .

von Komponenten von Vierervektoren eingeführt, die wir mit A^μ und A_μ mit Indizes oben und unten bezeichnen. Dabei gilt

$$A_0 = A^0\,, \quad A_1 = -A^1\,, \quad A_2 = -A^2\,, \quad A_3 = -A^3\,. \tag{38,2}$$

Die Größen A^μ heißen kontravariante, die Größen A_μ kovariante Komponenten des Vierervektors. Das Quadrat des Vierervektors ist dann

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^\mu A_\mu = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3\,.$$

Solche Summen werden häufig einfach als $A^\mu A_\mu$ geschrieben, das Summensymbol wird weggelassen. Allgemein wird als Konvention eingeführt, daß über jeden Index, der in einem gegebenen Ausdruck zweimal auftaucht, summiert wird, ohne daß das Summenzeichen ausgeschrieben wird. Bei jedem Paar gleicher Indizes muß dabei einer oben, der andere unten stehen. Diese Art der Bezeichnung der Summierung über, wie man sie auch nennt, stumme Indizes, ist sehr bequem und vereinfacht entscheidend die Formelniederschrift.

Analog dem Quadrat eines Vierervektors wird das Skalarprodukt zweier verschiedener Vierervektoren gebildet:

$$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3\,.$$

Man kann es offensichtlich sowohl in der Form $A^\mu B_\mu$ als auch in der Form $A_\mu B^\mu$ schreiben, ohne daß sich am Resultat dabei etwas ändert. Allgemein können in jedem Paar stummer Indizes immer die oberen mit den unteren Indizes vertauscht werden[1]).

Das Produkt $A^\mu B_\mu$ ist ein Viererskalar, es ist invariant bezüglich Drehungen des vierdimensionalen Koordinatensystems. Dies kann man direkt prüfen, es ist aber auch (in Analogie zum Quadrat $A^\mu A_\mu$) von vornherein selbstverständlich, da sich alle Vierervektoren nach demselben Gesetz transformieren.

Die Komponente A^0 eines Vierervektors nennt man die zeitliche und die Komponenten A^1, A^2, A^3 bezeichnet man als die räumlichen (in Analogie zum Viererradiusvektor). Das Quadrat eines Vierervektors kann positiv, negativ oder aber auch gleich Null sein, in diesen drei Fällen spricht man von zeitartigen, raumartigen und Null-Vierervektoren (wieder in Analogie zu der Terminologie im Fall von Abständen).

Bezüglich rein räumlicher Drehungen (d. h., bezüglich Transformationen, die die Zeitachse unverändert lassen) bilden die drei räumlichen Komponenten des Vierervektors einen dreidimensionalen Vektor $\boldsymbol{A}$. Die zeitartige Komponente des Vierervektors verhält sich bezüglich dieser Transformationen wie ein dreidimensionaler Skalar. Die Gesamtheit der Komponenten eines Vierervektors werden wir häufig in der Form

$$A^\mu = (A^0, \boldsymbol{A})$$

[1]) In der modernen Literatur werden die Indizes vierdimensionaler Vektoren häufig überhaupt weggelassen, ihre Quadrate und Skalarprodukte schreibt man einfach als A^2 bzw. $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$. Diese Bezeichnungsweise werden wir in diesem Buch jedoch nicht verwenden.

schreiben. Die kovarianten Komponenten desselben Vierervektors sind $A_\mu = (A^0, -\boldsymbol{A})$ und das Quadrat des Vierervektors ist $A^\mu A_\mu = (A^0)^2 - \boldsymbol{A}^2$. Entsprechend gilt für den Viererradiusvektor:

$$x^\mu = (c\,t, \boldsymbol{r}), \quad x_\mu = (c\,t, -\boldsymbol{r}), \quad x^\mu x_\mu = c^2 t^2 - \boldsymbol{r}^2 .$$

Für dreidimensionale Vektoren (bezüglich der Koordinaten x, y und z) besteht natürlich keine Notwendigkeit der Unterscheidung zwischen kontra- und kovarianten Komponenten. Überall, wo dies nicht zu Mißverständnissen führen kann, werden wir ihre Komponenten in der Form A_i ($i = x, y, z$) mit lateinischen Indizes unten schreiben. Speziell soll über doppelt auftauchende lateinische Indizes über die drei Werte x, y und z summiert werden (z. B. ist $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = A_i B_i$).

Eine Gesamtheit von sechzehn Größen $A^{\mu\nu}$, die sich bei einer Koordinatentransformation wie das Produkt der Komponenten von Vierervektoren transformieren, nennt man einen vierdimensionalen Tensor (Vierertensor) vom Rang 2. Analog wird ein Vierertensor höheren Ranges definiert.

Die Komponenten eines Vierertensors vom Rang 2 können auf drei verschiedene Arten dargestellt werden: als kontravariante Komponenten $A^{\mu\nu}$, als kovariante Komponenten $A^{\mu\nu}$ und als gemischte Komponenten $A^\mu{}_\nu$ (im letzten Fall muß man streng genommen zwischen $A^\mu{}_\nu$ und $A_\mu{}^\nu$ unterscheiden, d. h., man muß darauf achten, ob der erste oder der zweite Index oben bzw. unten steht). Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Arten von Komponenten ist durch folgende allgemeine Regel gegeben: das Heben oder das Senken eines zeitartigen Index (0) ändert nichts am Vorzeichen der Komponente, während das Heben oder Senken eines räumlichen Index (1, 2, 3) das Vorzeichen der Komponente ändert. Also gilt:

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \ldots,$$
$$A_0{}^0 = A^{00}, \quad A_0{}^1 = A^{01}, \quad A^0{}_1 = -A^{01}, \quad A_1{}^1 = -A^{11}, \ldots$$

Bezüglich rein räumlicher Transformationen bilden die neun Komponenten A^{11}, A^{12}, ... einen dreidimensionalen Tensor. Die drei Komponenten A^{01}, A^{02}, A^{03} und die drei Komponenten A^{10}, A^{20}, A^{30} sind dreidimensionale Vektoren und die Komponente A^{00} ist ein dreidimensionaler Skalar.

Der Tensor $A^{\mu\nu}$ heißt symmetrisch, falls $A^{\mu\nu} = A^{\nu\mu}$, und antisymmetrisch, falls $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$ gilt. Bei einem antisymmetrischen Tensor sind alle Diagonalkomponenten (die Komponenten A^{00}, A^{11}, ...) gleich Null, da z. B. $A^{00} = -A^{00}$ gelten muß. Bei einem symmetrischen Tensor $A^{\mu\nu}$ fallen die gemischten Komponenten $A^\mu{}_\nu$ und $A_\nu{}^\mu$ offensichtlich zusammen. In diesem Fall werden wir einfach A^μ_ν schreiben, d. h., wir werden die Indizes übereinander setzen.

In jeder tensoriellen Gleichung müssen die Ausdrücke auf beiden Seiten gleiche und gleich angeordnete (oben oder unten stehende) freie, d. h. nicht stumme, Indizes enthalten. Freie Indizes in tensoriellen Gleichungen kann man nach Belieben herauf oder herunter setzen, aber unbedingt gleichzeitig in allen Gliedern der Gleichung. Das Gleichsetzen von kontra- und kovarianten Komponenten verschiedener Tensoren ist nicht erlaubt. Eine solche Gleichung kann

zwar zufällig in einem bestimmten Bezugssystem richtig sein, sie ist dann aber beim Übergang zu einem anderen System falsch.

Aus den Komponenten des Tensors $A^{\mu\nu}$ kann man durch Bilden der Summe

$$A^{\mu}{}_{\mu} = A^{0}{}_{0} + A^{1}{}_{1} + A^{2}{}_{2} + A^{3}{}_{3}$$

einen Skalar erzeugen (dabei ist natürlich $A^{\mu}{}_{\mu} = A_{\mu}{}^{\mu}$). Diese Summe heißt Spur des Tensors, die Bildung der Spur des Tensors bezeichnet man als Verjüngung des Tensors.

Die oben betrachtete Bildung des Skalarproduktes zweier Vierervektoren ist ebenfalls eine Verjüngung: sie ist die Bildung des Skalares $A^{\mu} B_{\mu}$ aus dem Tensor $A^{\mu}B_{\nu}$. Allgemein erniedrigt jede Verjüngung bezüglich eines Indexpaares den Rang des Tensors um 2. Z. B. ist $A^{\mu}{}_{\nu\lambda\mu}$ ein Tensor vom Rang 2, $A^{\mu}{}_{\nu} B^{\nu}$ ein Vierervektor, $A^{\mu\nu}{}_{\mu\nu}$ ein Skalar usw.

Den Tensor, für den die Gleichung

$$\delta^{\nu}_{\mu} A^{\mu} = A^{\nu} \tag{38,3}$$

für jeden beliebigen Vierervektor A^{μ} gilt, heißt der Viererεinheitstensor. Offensichtlich sind seine Komponenten

$$\delta^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1, & \text{für} \quad \mu = \nu\,, \\ 0, & \text{für} \quad \mu \neq \nu\,. \end{cases} \tag{38,4}$$

Seine Spur ist $\delta^{\mu}_{\mu} = 4$.

Wenn wir bei dem Tensor δ^{ν}_{μ} einen Index heben oder den anderen senken, erhalten wir einen kontra- bzw. kovarianten Tensor, den wir mit $g^{\mu\nu}$ bzw. $g_{\mu\nu}$ bezeichnen und metrischen Tensor nennen. Die Tensoren $g^{\mu\nu}$ und $g_{\mu\nu}$ haben dieselben Komponenten, die wir in Form folgender Tabelle darstellen können:

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{38,5}$$

Dabei numeriert der Index μ die Zeilen und der Index ν die Spalten in der Reihenfolge der Werte 0, 1, 2, 3. Offensichtlich gilt

$$g_{\mu\nu} A^{\nu} = A_{\mu}\,, \qquad g^{\mu\nu} A_{\nu} = A^{\mu}\,. \tag{38,6}$$

Diese Formeln stellen die tensorielle Schreibweise der Operation des Hebens oder des Senkens von Indizes dar.

Zum Schluß wollen wir noch auf einige Differential- und Integraloperationen der vierdimensionalen Tensoranalysis eingehen.

Der Vierergradient des Skalares φ ist der Vierervektor

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,,\ \nabla\varphi\right).$$

Dabei ist zu beachten, daß die Ableitungen als kovariante Komponenten des Vierervektors betrachtet werden müssen. In der Tat ist das Differential des Skalares

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu$$

wieder ein Skalar. Aus seiner Form als Skalarprodukt zweier Vierervektoren folgt die Behauptung.

Allgemein sind die Differentialoperatoren nach den Koordinaten x^μ, $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ als kovariante Komponenten eines Vierervektoroperators zu betrachten. Deswegen ist z. B. die Divergenz eines Vierervektors, der Ausdruck $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}$, in dem die kontravarianten Komponenten A^μ differenziert werden, ein Skalar.

Im dreidimensionalen Raum kann sich eine Integration über ein Volumen, über eine Oberfläche oder über eine Kurve erstrecken. Im vierdimensionalen Raum gibt es dementsprechend vier Integrationsarten: 1) über eine Kurve im vierdimensionalen Raum, 2) über eine zweidimensionale Oberfläche, 3) über eine Hyperfläche, d. h. über eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, und 4) über ein vierdimensionales Volumen.

Analog zu den Theoremen von GAUSS und STOKES der dreidimensionalen Vektoranalysis gibt es Theoreme, die die Umwandlung von vierdimensionalen Integralen ineinander gestatten. Von diesen benötigten wir nur das Theorem über die Umwandlung eines Integrals über ein Vierervolumen in ein Integral über eine Hyperfläche.

Das Integrationselement über ein vierdimensionales Volumen

$$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}x^0\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3 = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}V \tag{38,7}$$

ist ein Skalar. Dies folgt aus (35,1) und (36,5). Das Intergrationselement $\mathrm{d}S^\mu$ über eine Hyperfläche ist ein Vierervektor, sein Betrag ist gleich der „Fläche" des Hyperflächenelementes und seine Richtung ist parallel zur Normale dieses Elementes. So ist z. B. $\mathrm{d}S^0 = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, das dreidimensionale Volumenelement $\mathrm{d}V$, die Projektion des Hyperflächenelementes auf die Hyperfläche $x^0 =$ const.

Ein Integral über eine geschlossene Hyperfläche kann man in ein Integral über das eingeschlossene Vierervolumen durch folgende Ersetzung umwandeln:

$$\mathrm{d}S_\mu \to \mathrm{d}\Omega\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,. \tag{38,8}$$

Für das Integral über einen Vektor A^μ gilt z. B.:

$$\oint A^\mu\,\mathrm{d}S_\mu = \int \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}\Omega\,. \tag{38,9}$$

Diese Formel ist die Verallgemeinerung des GAUSSschen Theorems.

Die relativistische Mechanik

IX

§ 39. Energie und Impuls

Bei der Herleitung der relativistischen Bewegungsgleichungen werden wir, wie in der klassischen Mechanik, vom Prinzip der kleinsten Wirkungen ausgehen. Wir beginnen mit dem Aufsuchen eines Wirkungsintegrals für ein freies Teilchen.

Dieses Integral darf nicht von der Wahl des Inertialsystems abhängen, d. h., es muß bezüglich der LORENTZ-Transformationen invariant sein. Daraus folgt, daß man es aus Skalaren aufbauen muß. Unter dem Integral müssen dabei Differentiale erster Ordnung stehen. Der einzige Skalar jedoch, den man für freie Teilchen bilden kann, ist das Intervall ds oder allgemeiner const $\cdot$ ds, wo const eine für die Teilchen charakteristische Konstante ist. Wir bezeichnen diese Konstante mit $-\,m\,c$; der Sinn dieser Bezeichnung wird weiter unten klar werden.

Auf diese Weise ergibt sich für die Wirkung eines freien Teilchens

$$S = -\,m\,c \int_a^b \mathrm{d}s\,, \tag{39,1}$$

wobei $\int_a^b$ das Integral längs einer Weltlinie zwischen zwei Ereignissen bezeichnet, die durch Anfangs- und Endpunkt der Bewegung des Teilchens zu den entsprechenden Zeiten t_1 und t_2 gegeben sind.

Mit Hilfe von (35,1) kann man diesen Ausdruck in Gestalt eines Integrals über die Zeit umschreiben:

$$S = -\,m\,c^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{d}t\,.$$

Vergleichen wir es mit der allgemeinen Definition (2,1)

$$S = \int_{t_2}^{t_1} L\,\mathrm{d}t\,,$$

so sehen wir, daß die relativistische LAGRANGE-Funktion des freien Teilchens folgende Gestalt hat:

$$L = -\,m\,c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{39,2}$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten, im nichtrelativistischen Bereich, kann man L

nach Potenzen von v/c entwickeln. Bis auf Glieder höherer Ordnung erhält man

$$L = -m c^2 + \frac{m v^2}{2} .$$

Das konstante Glied in der LAGRANGE-Funktion wirkt sich nicht auf die Bewegungsgleichungen aus und kann fortgelassen werden. Wir erhalten so den klassischen Ausdruck $L = m v^2/2$. Gleichzeitig wird der Sinn der Einführung der Konstanten m in (39,1) klar, welche mit der Masse des Teilchens identisch ist.

Der Impuls des Teilchens ergibt sich als Ableitung $\boldsymbol{p} = \partial L/\partial \boldsymbol{v}$. Durch Differenzieren von (39,2) erhalten wir

$$\boldsymbol{p} = \frac{m \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{39,3}$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten ($v < c$) geht dieser Ausdruck in den klassischen $\boldsymbol{p} = m \boldsymbol{v}$ über.

Die Ableitung des Impulses nach der Zeit ergibt die auf das Teilchen wirkende Kraft. Ändert sich nur die Richtung der Geschwindigkeit des Teilchens, d. h., stehen Kraftrichtung und Geschwindigkeitsrichtung senkrecht aufeinander, so folgt

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} . \tag{39,4}$$

Ist dagegen der Betrag der Geschwindigkeit veränderlich und die Kraft demnach mit der Geschwindigkeit gleichgerichtet, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{m}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} . \tag{39,5}$$

Man sieht, daß in beiden Fällen das Verhältnis Kraft zu Beschleunigung verschieden ist.

Entsprechend der allgemeinen Definition (6,1) ist die Energie eines Teilchens

$$E = \boldsymbol{p} \boldsymbol{v} - L . \tag{39,6}$$

Durch Einsetzen von L und $\boldsymbol{p}$ aus (39,2) und (39,3) erhalten wir

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \tag{39,7}$$

Diese sehr wichtige Formel besagt unter anderem, daß in der relativistischen Mechanik die Energie eines freien Teilchens für $v = 0$ nicht verschwindet, sondern den endlichen Wert

$$E = m c^2 \tag{39,8}$$

besitzt. Sie wird *Ruhenergie* des Teilchens genannt.

Für kleine Geschwindigkeiten ($v \ll c$) haben wir, wenn wir (39,7) nach Potenzen von v/c entwickeln,

$$E \approx m c^2 + \frac{m v^2}{2},$$

d. h. bis auf die Ruhenergie den klassischen Ausdruck für die kinetische Energie des Teilchens.

Es sei betont, daß wir hier zwar von einem „Teilchen" sprachen, aber von seinem Charakter als „Elementarteilchen" keinen Gebrauch machten. Die erhaltenen Formeln sind daher ebensogut auf einen aus vielen Teilchen zusammengesetzten Körper anwendbar, wobei unter m seine Gesamtmasse und unter v seine Geschwindigkeit als Ganzes zu verstehen ist. Insbesondere gilt die Formel (39,8) auch für einen beliebigen als Ganzes ruhenden Körper. Wir weisen besonders daraufhin, daß in der relativistischen Mechanik die Energie eines freien Körpers, d. h. die Energie eines beliebigen abgeschlossenen Systems eine wohlbestimmte, stets positive Größe ist, die unmittelbar mit der Masse des Körpers zusammenhängt. Wir erinnern hier daran, daß in der klassischen Mechanik dagegen die Energie nur bis auf eine beliebige additive Konstante bestimmt und daher sowohl positiv als auch negativ sein kann.

Die Energie eines ruhenden Körpers enthält außer der Ruhenergie der Teilchen, aus denen er zusammengesetzt ist, auch deren kinetische und Wechselwirkungsenergie. $m c^2$ ist also mit anderen Worten nicht gleich der Summe $\sum m_a c^2$ (mit m_a als Masse eines Teilchens) und daher auch m nicht gleich $\sum m_a$. In der relativistischen Mechanik gilt demnach kein Massenerhaltungssatz mehr: Die Masse eines zusammengesetzten Körpers ist nicht mehr gleich der Massensumme seiner Bestandteile. Statt dessen besteht nur ein Erhaltungssatz für eine auch die Ruhenergie des Teilchens enthaltende Energie.

Quadrieren wir die Ausdrücke (39,3) und (39,7) und setzen sie gleich, so erhalten wir folgende Beziehung zwischen Energie und Impuls des Teilchens:

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 . \tag{39,9}$$

Die durch den Impuls ausgedrückte Energie wird wie üblich HAMILTON-Funktion H genannt:

$$H = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2} . \tag{39,10}$$

Bei kleinen Geschwindigkeiten $p \ll m c$ gilt näherungsweise

$$H \approx m c^2 + \frac{p^2}{2 m},$$

d. h. wieder bis auf die Ruhenergie der klassische Ausdruck für die HAMILTON-Funktion.

Aus (39,3) und (39,7) gewinnt man auch folgende Beziehung zwischen Energie, Impuls und Geschwindigkeit des freien Teilchens:

$$\boldsymbol{p} = \frac{E\,\boldsymbol{v}}{c^2} . \tag{39,11}$$

Für $v = c$ werden Impuls und Energie eines Teilchens unendlich groß. Dies bedeutet, daß sich ein Teilchen mit von Null verschiedener Ruhmasse m nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen kann. In der relativistischen Mechanik kann es jedoch Teilchen mit verschwindender Ruhmasse geben, die die Geschwindigkeit c besitzen, dazu gehören z. B. Lichtquanten (Photonen) und auch Neutrinos. Aus (39,11) erhält man für solche Teilchen

$$p = \frac{E}{c} . \tag{39,12}$$

Genähert gilt diese Formel auch für den sogenannten *ultrarelativistischen* Fall, in dem die Energie E des Teilchens groß im Vergleich zu seiner Ruhenergie $m\,c^2$ ist.

§ 40. Der Viererimpuls

Die im vorigen Paragraphen hergeleiteten Schlußfolgerungen lassen an und für sich die Frage nach dem Transformationsgesetz für die Energie und für den Impuls des Teilchens beim Übergang von einem Bezugssystem in ein anderes offen. Zur Beantwortung dieser Frage muß man die vierdimensionale Natur dieser Größen untersuchen.

Der gewöhnliche dreidimensionale Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ des Teilchens läßt sich zu einem Vierervektor erweitern. Diese vierdimensionale Geschwindigkeit (Vierergeschwindigkeit) ist

$$u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s} . \tag{40,1}$$

Indem man entsprechend (35,1) das Intervall $\mathrm{d}s$ durch das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ ausdrückt, kann man

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\mathrm{d}x^\mu}{c\,\mathrm{d}t}$$

schreiben. Hiernach sind die Komponenten dieses Vierervektors offensichtlich

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) . \tag{40,2}$$

Die Komponenten der Vierergeschwindigkeit sind nicht unabhängig. Mit $\mathrm{d}x_\mu\,\mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}s^2$ folgt:

$$u_\mu u^\mu = 1 . \tag{40,3}$$

Vom geometrischen Standpunkt ist u^μ der Einheitsvektor der Tangente zur Weltkurve des Teilchens. Der Vierervektor

$$p^\mu = m\,c\,u^\mu \tag{40,4}$$

heißt *vierdimensionaler Impuls* (Viererimpuls) des Teilchens. Wenn wir die Komponenten der Vierergeschwindigkeit aus (40,2) verwenden und sie mit den Ausdrücken (39,3) und (39,7) vergleichen, sehen wir, daß die Komponenten des Viererimpulses

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) \tag{40,5}$$

sind. In der relativistischen Mechanik bilden also Energie und Impuls einen Vierervektor. Daraus folgen unmittelbar die Transformationsformeln dieser Größen. Setzen wir in die allgemeine Formel (38,1) für die Transformation eines Vierervektors den Ausdruck (40,5) ein, so erhalten wir:

$$p_x = \frac{p_x' + \frac{V}{c^2} E'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p_y', \quad p_z = p_z', \quad E = \frac{E' + V p_x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{40,6}$$

wo p_x, p_y, p_z die Komponenten des dreidimensionalen Impulses $\boldsymbol{p}$ sind.

Als Folge der Definition (40,4) des Viererimpulses und der Identität (40,3) gilt für das Quadrat des Viererimpulses des freien Teilchens:

$$p_\mu\, p^\mu = m^2 c^2 . \tag{40,7}$$

Setzen wir hier die Komponenten p^μ aus (40,5) ein, so erhalten wir wieder (39,9).

§ 41. Der Zerfall von Teilchen

Wir betrachten den spontanen Zerfall eines Körpers der Masse M in zwei Teile mit den Massen m_1 und m_2. Wenden wir den Energieerhaltungssatz im Ruhesystem des Körpers auf den Zerfall an, so ergibt sich[1])

$$M = E_{10} + E_{20} , \tag{41,1}$$

wobei E_{10} und E_{20} die Energien der auseinanderfliegenden Teilchen sind. Infolge der Ungleichungen $E_{10} > m_1$ und $E_{20} > m_2$ kann (41,1) nur erfüllt sein, wenn

[1]) In den §§41, 42 setzen wir $c = 1$. Mit anderen Worten, wir wählen die Lichtgeschwindigkeit als Einheit der Geschwindigkeitsmessung (dabei werden die Einheiten der Länge und der Zeit einander gleich). Diese Wahl ist für die relativistische Mechanik natürlich und vereinfacht die Formelschreibweise. In diesem Buch, das zum großen Teil der nichtrelativistischen Theorie gewidmet ist, werden wir jedoch i. A. nicht dieses System verwenden. Im anderen Fall werden wir dieses besonders anmerken.

Die Formeln, in denen $c = 1$ gesetzt worden ist, können schnell in die gebräuchlichen Einheiten zurücktransformiert werden: es muß lediglich überall die Lichtgeschwindigkeit so eingefügt werden, daß alle Größen in den richtigen Einheiten erscheinen.

$M > m_1 + m_2$ gilt, d. h., ein Körper kann spontan nur in Teile zerfallen, deren Massensumme kleiner als die Masse des Körpers ist. Besteht umgekehrt die Ungleichung $M < m_1 + m_2$, so ist der Körper in bezug auf diese Zerfallsart stabil und kein spontaner Zerfall ist möglich. Um auch hier einen Zerfall zu erreichen, muß man dem Körper von außen eine Energie zuführen, die mindestens gleich seiner *Bindungsenergie* $(m_1 + m_2 - M)$ ist.

Neben dem Energieerhaltungssatz muß auch der Impulserhaltungssatz beim Zerfall erfüllt sein, d. h., die Summe der Impulse der auseinanderfliegenden Teile muß gleich dem ursprünglichen Impuls des Körpers, also Null sein: $\boldsymbol{p}_{10} + \boldsymbol{p}_{20} = 0$. Daraus folgt $p_{10}^2 = p_{20}^2$ oder

$$E_{10}^2 - m_1^2 = E_{20}^2 - m_2^2 . \tag{41,2}$$

Die beiden Gleichungen (41,1) und (41,2) bestimmen eindeutig die Energie der auseinanderfliegenden Teile:

$$E_{10} = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M}, \qquad E_{20} = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} . \tag{41,3}$$

Das in gewissem Sinne umgekehrte Problem besteht in der Berechnung der Gesamtenergie M zweier zusammenstoßender Teilchen in dem Bezugssystem, in dem ihr Gesamtimpuls verschwindet (Schwerpunktsystem). Die Berechnung dieser Größe gibt ein Kriterium für die Möglichkeit des Auftretens nichtelastischer Zusammenstöße, die von einer Zustandsänderung der stoßenden Teilchen oder von einer Erzeugung neuer Teilchen begleitet sind. Jeder dieser Prozesse kann nur unter der Bedingung stattfinden, daß die Massensumme aller „Reaktionsprodukte" M nicht übersteigt.

Im Ausgangs- oder Laborsystem stoße ein Teilchen mit der Masse m_1 und der Energie E_1 auf ein ruhendes Teilchen der Masse m_2. Die Gesamtenergie beider Teilchen beträgt

$$E = E_1 + E_2 = E_1 + m_2 ,$$

ihr Gesamtimpuls $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_1$. Betrachten wir die beiden Teilchen als ein zusammengesetztes System, so finden wir für die Geschwindigkeit dieses Systems als Ganzes nach (39,11):

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{p}}{E} = \frac{\boldsymbol{p}_1}{E_1 + m_2} . \tag{41,4}$$

$\boldsymbol{V}$ ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems in bezug auf das Laborsystem.

Um die gesuchte Größe M zu finden, ist es nicht nötig, die Transformation von einem in das andere Bezugssystem auch tatsächlich auszuführen. Statt dessen wenden wir die Formel (39,9) sowohl auf das zusammengesetzte System als auch auf die beiden Teilchen getrennt an. Dies ergibt

$$M^2 = E^2 - p^2 = (E_1 + m_2)^2 - (E_1^2 - m_1^2) ,$$

woraus

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_2 E_1 \tag{41,5}$$

folgt.

Aufgabe

Man bestimme die maximale Energie, die beim Zerfall eines ruhenden Teilchens der Masse M in drei Teilchen m_1, m_2, m_3 von einem dieser Teilchen davongetragen werden kann.

Lösung. Das Teilchen m_1 besitzt die größtmögliche Energie, wenn das System der beiden anderen Teilchen m_2 und m_3 seine kleinste mögliche Masse hat; diese ist gleich der Summe $m_2 + m_3$ (und entspricht der gemeinsamen Bewegung dieser Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit). Durch Anwendung der Formel (41,3) für den Zerfall des Körpers in zwei Teile erhalten wir daher

$$E_{1\,\max} = c^2 \frac{M^2 + m_1^2 - (m_2 + m_3)^2}{2\,M}.$$

§ 42. Der elastische Stoß von Teilchen

Wir wollen hier vom Standpunkt der relativistischen Mechanik den elastischen Stoß von Teilchen betrachten. Wir bezeichnen die Impulse und Energien der zwei sich stoßenden Teilchen (mit den Massen m_1 und m_2) mit $\boldsymbol{p}_1$, E_1 und $\boldsymbol{p}_2$, E_2. Ihre Werte nach dem Stoß kennzeichnen wir mit einem Strich.

Die Erhaltungssätze für die Energie und den Impuls kann man in Form des Erhaltungssatzes des Viererimpulses zusammenfassen:

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu. \tag{42,1}$$

Wir werden aus dieser Vierervektorgleichung invariante Beziehungen, die für die weitere Rechnung nützlich sind, ableiten. Dazu schreiben wir (42,1) in folgender Weise um:

$$p_1^\mu + p_2^\mu - p_1'^\mu = p_2'^\mu.$$

Beide Seiten dieser Gleichung werden quadriert, d. h., wir bilden ihre Skalarprodukte mit sich selbst. Die Quadrate der Viererimpulse p_1^μ und $p_1'^\mu$ sind gleich m_1^2, die Quadrate von p_2^μ und $p_2'^\mu$ sind m_2^2. Daraus folgt:

$$m_1^2 + p_{1\mu} p_2^\mu - p_{1\mu} p_1'^\mu - p_{2\mu} p_1'^\mu = 0\,. \tag{42,2}$$

Analog erhalten wir durch Quadrieren der Gleichung $p_1^\mu + p_2^\mu - p_2'^\mu = p_1'^\mu$:

$$m_2^2 + p_{1\mu} p_2^\mu - p_{2\mu} p_2'^\mu - p_{1\mu} p_2'^\mu = 0\,. \tag{42,3}$$

Wir betrachten den Stoß im Laborsystem, in dem bis zum Stoß eines der Teilchen (das Teilchen mit der Masse m_2) ruht. Dann gilt $\boldsymbol{p}_2 = 0$, $E_2 = m_2$ und die in (42,2) auftretenden Skalarprodukte sind gleich:

$$p_{1\mu} p_2^\mu = E_1 m_2, \qquad p_{2\mu} p_1'^\mu = m_2 E_1'\,, \tag{42,4}$$

$$p_{1\mu} p_1'^\mu = E_1 E_1' - \boldsymbol{p}_1 \boldsymbol{p}_1' = E_1 E_1' - p_1 p_1' \cos\theta_1\,,$$

Hierbei ist θ_1 der Streuwinkel des ankommenden Teilchens der Masse m_1. Wenn wir diese Ausdrücke in (42,2) einsetzen, erhalten wir:

$$\cos\theta_1 = \frac{E_1' (E_1 + m_2) - E_1 m_2 - m_1^2}{p_1 p_1'}. \tag{42,5}$$

Analog finden wir aus (42,3)

$$\cos \theta_2 = \frac{(E_1 + m_2)(E_2' - m_2)}{p_1 p_2'}. \tag{42,6}$$

Hierbei ist θ_2 der Winkel, der von dem übertragenen Impuls $\boldsymbol{p}_2'$ und dem Impuls des ankommenden Teilchens $\boldsymbol{p}_1$ gebildet wird. Diese Formeln verknüpfen die Streuwinkel beider Teilchen im Laborsystem mit der Änderung ihrer Energien.

Wir stellen fest, daß der Streuwinkel einen gewissen maximalen Wert nicht überschreiten kann, falls das ankommende Teilchen schwerer als das ruhende ist, d. h. falls $m_1 > m_2$ gilt. Durch elementares Ausrechnen findet man, daß dieser Maximalwert durch die Gleichung

$$\sin \theta_{1\,\max} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{42,7}$$

gegeben ist und mit dem klassischen Resultat (14,8) identisch ist.

Die Formeln (42,5—6) vereinfachen sich für den Fall, daß das ankommende Teilchen die Masse Null besitzt: $m_1 = 0$ und dementsprechend $p_1 = E_1, p_1' = E_1'$. Wir wollen für diesen Fall den Ausdruck für die Energie des ankommenden Teilchens nach dem Stoß als Funktion seines Ablenkungswinkels angeben:

$$E_1' = \frac{m_2}{1 - \cos \Theta_1 + \frac{m_2}{E_1}}. \tag{42,8}$$

Kehren wir erneut zum allgemeinen Fall des Stoßes von Teilchen beliebiger Masse zurück. Am einfachsten läßt sich der Stoß im Schwerpunktsystem beschreiben. Wir kennzeichnen die Werte aller Größen in diesem System durch den zusätzlichen Index 0. Es gilt $\boldsymbol{p}_{10} = -\boldsymbol{p}_{20} \equiv \boldsymbol{p}_0$. Als Folge des Impulserhaltungssatzes werden die Impulse beider Teilchen beim Stoß lediglich gedreht, sie bleiben der Größe nach gleich und in der Richtung entgegengesetzt zueinander. Aufgrund der Energieerhaltung bleibt der absolute Betrag jedes der Impulse unverändert.

Den Streuwinkel im Schwerpunktsystem, d. h. den Winkel um den beim Stoß die Impulse $\boldsymbol{p}_{10}$ und $\boldsymbol{p}_{20}$ gedreht werden, bezeichnen wir mit χ. Der Streuprozeß wird im Schwerpunktsystem, und deswegen auch in jedem anderen System, durch diese Größe vollständig bestimmt. Er wird zweckmäßigerweise auch bei der Beschreibung des Stoßes im Laborsystem als der einzige Parameter, der nach Berücksichtigung der Erhaltungssätze für die Energie und den Impuls noch unbestimmt bleibt, gewählt.

Wir wollen die Endenergien beider Teilchen im Laborsystem durch diesen Parameter ausdrücken. Dazu kehren wir zu der Beziehung (42,2) zurück, dieses Mal jedoch drücken wir das Produkt $p_{1\mu} p_1'^{\mu}$ im Schwerpunktsystem aus:

$$\begin{aligned} p_{1\mu} p_1'^{\mu} &= E_{10} E_{10}' - \boldsymbol{p}_{10} \boldsymbol{p}_{10}' = E_{10}^2 - p_0^2 \cos \chi \\ &= p_0^2 (1 - \cos \chi) + m_1^2 \end{aligned}$$

(im Schwerpunktsystem bleibt die Energie jedes Teilchens beim Stoß unver-

ändert: $E'_{10} = E_{10}$). Die restlichen zwei Produkte drücken wir wie vorher im Laborsystem aus, d. h., wir übernehmen sie aus (42,4). Wir erhalten:

$$E_1 - E'_1 = \frac{p_0^2}{m_2}(1 - \cos\chi) .$$

Wir müssen nun noch p_0^2 durch Größen, die sich auf das Laborsystem beziehen, ausdrücken. Dazu setzen wir die Werte der Invarianten $p_{1\mu}\, p_2^\mu$ in beiden Systemen einander gleich:

$$E_{10}\, E_{20} - \mathbf{p}_{10}\,\mathbf{p}_{20} = E_1\, m_2$$

oder

$$\sqrt{(p_0^2 + m_1^2)(p_0^2 + m_2^2)} = E_1\, m_2 - p_0^2 .$$

Auflösen nach p_0^2 ergibt

$$p_0^2 = \frac{m_2^2\,(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_2\, E_1} . \tag{42,9}$$

Unter Berücksichtigung des Erhaltungssatzes $E_1 + m_2 = E'_1 + E'_2$ erhalten wir endgültig:

$$E_1 - E'_1 = E'_2 - m_2 = \frac{m_2\,(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_2\, E_1}(1 - \cos\chi) . \tag{42,10}$$

Dieser Ausdruck stellt die Energie dar, die vom ersten Teilchen verloren und folglich vom zweiten Teilchen aufgenommen wurde. Die größte Energieübertragung erhält man für $\chi = \pi$. Sie ist gleich

$$E'_{2\,\max} - m_2 = E_1 - E'_{1\,\min} = \frac{2\, m_2\,(E_1^2 - m_1^2)}{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_2\, E_1} . \tag{42,11}$$

Das Verhältnis der minimalen kinetischen Energie des ankommenden Teilchens nach dem Stoß zu seiner ursprünglichen kinetischen Energie ist gleich

$$\frac{E'_{1\,\min} - m_1}{E_1 - m_1} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1^2 + m_2^2 + 2\, m_2\, E_1} . \tag{42,12}$$

Im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten $\left(\text{für } E \approx m + \frac{m v^2}{2}\right)$ strebt dieses Verhältnis zu dem konstanten Grenzwert

$$\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 .$$

Im umgekehrten Grenzfall großer Energien E_1 strebt das Verhältnis (42,12) gegen Null; der Wert $E'_{1\,\min}$ strebt gegen einen konstanten Grenzwert. Dieser ist

$$E'_{1\,\min} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2\, m_2} .$$

Wir nehmen nun an, daß $m_2 \gg m_1$ ist, d. h., daß die Masse des ankommenden Teilchens klein im Vergleich mit der Masse des ruhenden Teilchens ist. Gemäß

der klassischen Mechanik kann dabei das leichte Teilchen dem schweren nur einen verschwindenden Teil seiner Energie übertragen (siehe § 14). Dies gilt jedoch nicht im relativistischen Fall. Aus der Formel (42,12) entnimmt man, daß bei hinreichend großer Energie E_1 der relative Anteil der übertragenen Energie die Ordnung 1 erreichen kann. Dafür ist jedoch nicht hinreichend, daß die Geschwindigkeit des Teilchens m_1 von der Ordnung 1 ist, sondern wie leicht zu sehen ist, muß die Energie notwendigerweise von der Ordnung

$$E_1 \sim m_2$$

sein, d. h., das leichte Teilchen muß eine Energie von derselben Ordnung wie die Ruheenergie des schweren Teilchen besitzen.

Ähnliches gilt für den Fall $m_2 \ll m_1$, d. h., falls das schwere Teilchen am leichten gestreut wird. Auch hier findet gemäß der klassischen Mechanik nur eine verschwindend kleine Energieübertragung statt. Der Anteil der übertragenen Energie beginnt erst ab der Energie

$$E_1 \sim \frac{m_1^2}{m_2}$$

wesentlich zu werden. Man muß beachten, daß man es auch hier nicht einfach mit Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit zu tun hat, sondern mit Energien, die groß im Vergleich zu m_1 sind, d. h. mit dem ultrarelativistischen Fall.

Aufgaben

1. Für zwei Teilchen gleicher Masse bestimme man im Laborsystem den Winkel, unter dem sie nach dem Stoß auseinanderfliegen.

Lösung: Durch Quadrieren beider Seiten der Gleichung (42,1) erhalten wir

$$p_{1\mu} p_2^{\mu} = p'_{1\mu} p_2'^{\mu} ,$$

und nach Einsetzen der Werte der Skalarprodukte im Laborsystem

$$E_1 m_2 = E'_1 E'_2 - p'_1 p'_2 \cos\theta .$$

Hierbei ist θ der Winkel, unter dem die Teilchen auseinanderfliegen (der Winkel zwischen $\boldsymbol{p}'_1$ und $\boldsymbol{p}'_2$). Für Teilchen gleicher Masse ($m_1 = m_2 \equiv m$) erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$p'_1 = \sqrt{E_1'^2 - m^2} , \qquad p'_2 = \sqrt{E_2'^2 - m^2}$$

und des Energiesatzes ($E_1 + m = E'_1 + E'_2$):

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{(E'_1 - m)(E'_2 - m)}{(E'_1 + m)(E'_2 + m)}} .$$

Der Winkel θ ändert sich in den Grenzen von $\pi/2$ (bei $E'_1 \to m$ oder $E'_2 \to m$) bis zum minimalen Wert $\theta_{\min}$, der bei $E'_1 = E'_2$ erreicht wird und durch

$$\cos\theta_{\min} = \frac{E_1 - m}{E_1 + 3m}$$

gegeben ist.

2. Man drücke E_1', E_2' und χ durch den Streuwinkel θ_1 im Laborsystem für den Fall des Stoßes von zwei Teilchen gleicher Masse m aus.

Lösung. Wenn wir in (42,5) $p_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$, $p_1' = \sqrt{E_1'^2 - m^2}$ einsetzen und die Gleichung nach E_1' auflösen, erhalten wir

$$E_1' = \frac{E_1 + m + (E_1 - m)\cos^2\theta_1}{E_1 + m - (E_1 - m)\cos^2\theta_1}.$$

Ferner gilt

$$E_2' = E_1 + m - E_1' = m + \frac{(E_1^2 - m^2)\sin^2\theta_1}{2m + (E_1 - m)\sin^2\theta_1}.$$

Durch Vergleich mit dem Ausdruck, der E_1' mit χ verknüpft,

$$E_1' = E_1 - \frac{1}{2}(E_1 - m)(1 - \cos\chi)$$

(aus (42,10)), finden wir den Streuwinkel im Schwerpunktsystem:

$$\cos\chi = \frac{2m - (E_1 + 3m)\sin^2\theta_1}{2m + (E_1 + m)\sin^2\theta_1}.$$

Teil II. Elektrodynamik

Ladungen im elektromagnetischen Feld X

§ 43. Das Viererpotential des Feldes

Die Wechselwirkung von Teilchen untereinander läßt sich durch ein *Kraftfeld* beschreiben. Anstatt nämlich zu sagen, daß ein bestimmtes Teilchen auf ein anderes wirkt, stellt man sich vor, daß es ein Feld um sich herum erzeugt. Auf jedes andere Teilchen, das sich in diesem Feld befindet, wirkt eine gewisse Kraft. In der klassischen Mechanik ist das Feld nur ein Hilfsmittel zur Beschreibung wechselwirkender Teilchen. Die Lage ändert sich völlig in der relativistischen Mechanik wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung. Die Kräfte, die zu einem bestimmten Zeitpunkt auf ein Teilchen wirken, werden nicht durch die räumliche Lage der Teilchen in diesem Augenblick bestimmt. Eine Änderung der Lage eines Teilchens beeinflußt ein anderes Teilchen erst nach Ablauf einer gewissen Zeitspanne. Das Feld selbst gewinnt somit physikalische Realität. Es gibt keine unmittelbare Wechselwirkung zwischen entfernten Teilchen, sie kann zu jedem Zeitpunkt nur an benachbarten Raumpunkten stattfinden (Nahwirkung). Man hat also von einer Wechselwirkung eines Teilchens mit dem Feld und der Wechselwirkung des Feldes mit anderen Teilchen zu sprechen.

Der zweite Teil dieses Buches ist der Theorie elektromagnetischer Felder gewidmet. Wir beginnen mit der Untersuchung der Wechselwirkung von Teilchen in einem gegebenen Feld.

Die Wirkungsfunktion[1]) eines Teilchens, das sich in einem vorgegebenen elektromagnetischen Felde bewegt, setzt sich aus zwei Teilen zusammen: aus der Wirkung für ein freies Teilchen (39,1) und einem Term, der die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Felde beschreibt. Dieser Zusatzterm muß sowohl Größen, die das Teilchen, als auch Größen, die das Feld charakterisieren, enthalten.

Es zeigt sich, daß die Eigenschaften eines Teilchens in bezug auf seine Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld stets durch einen Parameter beschrieben werden, nämlich die *Ladung* e des Teilchens, die positiv und negativ

[1]) Die folgenden Behauptungen sind weitgehend als Ergebnis der experimentellen Erfahrung anzusehen. Die Wirkungsfunktion eines Teilchens im elektromagnetischen Feld läßt sich nicht durch allgemeine Überlegungen finden, wie etwa durch die Forderung nach relativistischer Invarianz (diese würde in (43,1) auch einen Term der Form $\int A\, ds$ zulassen. wo A eine skalare Funktion ist).

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei daran erinnert, daß wir uns hier im Rahmen der klassischen Theorie (nicht der Quantentheorie) befinden — es werden daher nirgends Effekte berücksichtigt, die mit dem Spin der Teilchen zusammenhängen.

(oder Null) sein kann. Die Eigenschaften des Feldes drücken sich durch einen Vierervektor A_μ, das sogenannte *Viererpotential*, aus, dessen Komponenten Funktionen der Koordinaten und der Zeit sind.

In die Wirkungsfunktion gehen die A_μ in Gestalt des Termes

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_\mu \, \mathrm{d}x^\mu$$

ein; sie sind hierbei für die Punkte der Weltlinie des Teilchens zu nehmen. Der Faktor $1/c$ wurde aus Zweckmäßigkeitsgründen hinzugefügt. Es sei bemerkt, daß die Maßeinheiten für die Ladung und das Potential bis jetzt noch beliebig wählbar sind, da wir noch keine Formel besitzen, die sie mit schon bekannten Größen verknüpfen. (Wir werden auf diese Frage im § 53 zurückkommen.)

Die Wirkungsfunktion einer Ladung im elektromagnetischen Feld hat also die Gestalt

$$S = \int_a^b \left(-\, m\, c\, \mathrm{d}s - \frac{e}{c} A_\mu \, \mathrm{d}x^\mu\right). \tag{43,1}$$

Die drei räumlichen Komponenten des Vierervektors A^μ bilden den dreidimensionalen Vektor $\boldsymbol{A}$, das sogenannte *Vektorpotential* des Feldes. Die zeitliche Komponente heißt *skalares Potential*, wir bezeichnen sie als $A^0 = \varphi$. Es gilt also

$$A^\mu = (\varphi, \boldsymbol{A}). \tag{43,2}$$

Das Wirkungsintegral läßt sich dann in der Form

$$S = \int_a^b \left(-\, m\, c\, \mathrm{d}s + \frac{e}{c} \boldsymbol{A}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} - e\,\varphi\, \mathrm{d}t\right)$$

schreiben oder, wenn wir die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ des Teilchens einführen und zur Integration über die Zeit übergehen,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(-\, m\, c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{v} - e\,\varphi\right) \mathrm{d}t\,. \tag{43,3}$$

Der Integrand ist gerade die LAGRANGE-Funktion einer Ladung im elektromagnetischen Feld:

$$L = -\, m\, c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{v} - e\,\varphi\,. \tag{43,4}$$

Sie unterscheidet sich von der LAGRANGE-Funktion eines freien Teilchens durch den Term $\frac{e}{c} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{v} - e\,\varphi$, der die Wechselwirkung der Ladung mit dem Feld beschreibt.

Die Ableitungen $\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ bilden den verallgemeinerten Teilchenimpuls; wir bezeichnen ihn mit $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\,. \tag{43,5}$$

Mit $\boldsymbol{p}$ wurde hier der gewöhnliche Impuls (oder kurz Impuls) des Teilchens bezeichnet.

Aus der LAGRANGE-Funktion ergibt sich die HAMILTON-Funktion des Teilchens im Felde nach der allgemeinen Formel[1])

$$\mathfrak{H} = \boldsymbol{v}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - L\,.$$

Mit (43,4) finden wir

$$\mathfrak{H} = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi\,. \tag{43,6}$$

Die HAMILTON-Funktion ist jedoch nicht durch die Geschwindigkeit, sondern durch den verallgemeinerten Impuls des Teilchens auszudrücken. Aus (43,5) und (43,6) ist ersichtlich, daß die Beziehung zwischen $\mathfrak{H} - e\varphi$ und $\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$ dieselbe wie die zwischen $\mathfrak{H}$ und $\boldsymbol{p}$ bei Abwesenheit des Feldes ist, d. h., es gilt

$$\left(\frac{\mathfrak{H} - e\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2. \tag{43,7}$$

Für kleine Geschwindigkeiten, d. h. beim Übergang zur klassischen Mechanik, nimmt die LAGRANGE-Funktion (43,4) die Gestalt

$$L = \frac{m v^2}{2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi \tag{43,8}$$

an. In dieser Näherung ist

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$$

und wir finden folgenden Ausdruck für die HAMILTON-Funktion:

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + e\varphi\,. \tag{43,9}$$

§ 44. Die Bewegungsgleichung einer Ladung im Felde

Eine in einem Feld befindliche Ladung unterliegt nicht nur der Wirkung des Feldes, sondern übt auch ihrerseits einen Einfluß auf das Feld aus, indem sie

[1]) In diesem Teil des Buches werden die Energie und die HAMILTON-Funktion mit Frakturbuchstaben $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ gekennzeichnet (anstatt mit E und H) um Verwechslungen mit den Feldstärkebezeichnungen zu vermeiden.

es ändert. Bei kleinen Ladungen e kann man jedoch die Rückwirkung auf das Feld vernachlässigen.[1]) In diesem Falle kann man bei der Betrachtung der Bewegung in einem gegebenen Feld annehmen, daß das Feld weder von der Lage noch von der Geschwindigkeit der Ladung abhängt.

Die Bewegungsgleichungen der Ladung ergeben sich in einem vorgegebenen elektromagnetischen Feld aus den LAGRANGE-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}, \tag{44,1}$$

wo L durch (43,4) gegeben ist.

Die Ableitungen $\partial L/\partial \boldsymbol{v}$ bilden den verallgemeinerten Teilchenimpuls (43,5). Weiterhin ist

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c}\operatorname{grad} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v} - e\operatorname{grad}\varphi\,.$$

Nach einer aus der Vektoranalysis bekannten Formel gilt für zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ die Gleichung

$$\operatorname{grad} \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}\,\nabla)\,\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\,\nabla)\,\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}].$$

Wenden wir sie auf $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v}$ an und berücksichtigen wir, daß bei der Ableitung nach $\boldsymbol{r}$ $\boldsymbol{v}$ konstant zu halten ist, so finden wir

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}] - e\operatorname{grad}\varphi\,.$$

Die LAGRANGEsche Gleichung hat also die Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}] - e\operatorname{grad}\varphi\,.$$

Das vollständige Differential $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen: aus der zeitlichen Änderung $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}t$ des Vektorpotentials in einem gegebenen Raumpunkt und der Änderung $(\mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\nabla)\,\boldsymbol{A}$ beim Übergang zu einem anderen, in der Entfernung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ gelegenen Raumpunkt:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\,\nabla)\,\boldsymbol{A}\,.$$

Setzen wir dies in die letzte Gleichung ein, so erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - e\operatorname{grad}\varphi + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}]\,. \tag{44,2}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines Teilchens im elektromagnetischem Feld. Links steht die zeitliche Ableitung des Teilchenimpulses. Die rechte Seite ist

[1]) Die Bedingung für die Kleinheit der Ladung in diesem Sinne besteht in der Kleinheit der bei ihrer Bewegung entstehenden sogenannten Strahlungsdämpfung (die im § 84 betrachtet wird).

daher die Kraft, die im elektromagnetischen Feld auf eine Ladung wirkt. Wir sehen, daß sie aus zwei Teilen besteht: Der erste Teil (das erste und zweite Glied auf der rechten Seite von (44,2)) hängt nicht von der Geschwindigkeit des Teilchens ab. Der zweite Teil (das dritte Glied) hängt dagegen von $\boldsymbol{v}$ ab und ist proportional zum Betrage der Geschwindigkeit sowie senkrecht zu ihr gerichtet.

Der erste Kraftanteil, bezogen auf die Einheit der Ladung, heißt *elektrische Feldstärke*; wir bezeichnen sie mit $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \,. \tag{44,3}$$

Der im zweiten Kraftanteil bei $\boldsymbol{v}/c$ stehende Faktor, wieder auf die Ladungseinheit bezogen, wird *magnetische Feldstärke* genannt und durch $\boldsymbol{H}$ bezeichnet:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \,. \tag{44,4}$$

Die Bewegungsgleichung einer Ladung im elektromagnetischen Feld können wir nun in der Gestalt

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\,\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] \tag{44,5}$$

schreiben. Der rechts stehende Ausdruck wird LORENTZ-*Kraft* genannt. Ihr erster Teil, die Kraft, mit der das elektrische Feld auf die Ladung wirkt, hängt nicht von der Geschwindigkeit der Ladung ab und ist dem Felde $\boldsymbol{E}$ gleichgerichtet. Das Magnetfeld wirkt durch den zweiten Teil. Dieser Kraftanteil ist proportional zur Geschwindigkeit der Ladung und sowohl senkrecht zur Geschwindigkeit als auch zum Magnetfeld $\boldsymbol{H}$.

Für Geschwindigkeiten, die im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit klein sind, hat der Impuls $\boldsymbol{p}$ angenähert seinen klassischen Wert $m\,\boldsymbol{v}$, und die Bewegungsgleichung (44,5) geht in

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\,\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] \tag{44,6}$$

über.

Wir leiten noch eine Gleichung ab, die die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Teilchens[1]), d. h. die Größe

$$\frac{d\mathfrak{E}_{\text{kin}}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

bestimmt. Man überzeugt sich leicht davon, daß

$$\frac{d\mathfrak{E}_{\text{kin}}}{dt} = \boldsymbol{v}\,\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

[1]) Unter „kinetischer Energie“ verstehen wir hier und später den die Ruhenergie enthaltenden Ausdruck (39,7).

gilt. Setzen wir hier $d\boldsymbol{p}/dt$ aus (44,5) ein, so erhalten wir mit $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\,\boldsymbol{v} = 0$

$$\frac{d\mathfrak{E}_{\text{kin}}}{dt} = e\,\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{v}\,. \tag{44,7}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite stellt die Arbeit dar, die das Feld (pro Zeiteinheit) an dem Teilchen leistet. Arbeit wird nur vom elektrischen Feld geleistet. Das Magnetfeld leistet an einer in ihm bewegten Ladung keine Arbeit, da die wirkende Kraft senkrecht zur Geschwindigkeit des Teilchens gerichtet ist.

Im § 5 wurde erwähnt, daß die Gleichungen der klassischen Mechanik gegenüber einer Zeitumkehr invariant sind. Man sieht leicht, daß dies auch für das relativistische elektromagnetische Feld gilt. Man hat jedoch mit $t \to -t$ auch das Vorzeichen des Magnetfeldes umzukehren. Die Bewegungsgleichung (44,5) ändert sich nämlich nicht, wenn wir die Ersetzung

$$t \to -t\,, \qquad \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}\,, \qquad \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{H} \tag{44,8}$$

vornehmen.

Dabei ändert sich gemäß (44,3) und (44,4) auch das skalare Potential nicht, während das Vektorpotential das umgekehrte Vorzeichen erhält:

$$\varphi \to \varphi\,, \qquad \boldsymbol{A} \to -\boldsymbol{A}\,. \tag{44,9}$$

Ist daher in einem elektromagnetischen Felde irgendeine Bewegung möglich, so kann auch die umgekehrte Bewegung in einem Felde mit entgegengesetzt gerichtetem $\boldsymbol{H}$ stattfinden.

Aufgabe

Man drücke die Beschleunigung eines Teilchens durch seine Geschwindigkeit und die elektrische und magnetische Feldstärke aus.

Lösung: Wir setzen in der Bewegungsgleichung (44,5) $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\,\mathfrak{E}_{\text{kin}}/c^2$ und benutzen für $\frac{d\mathfrak{E}_{\text{kin}}}{dt}$ den Ausdruck (44,7). Das Ergebnis lautet

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left\{\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{H}] - \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{E})\right\}.$$

§ 45. Eichinvarianz

Wir untersuchen hier die Frage, inwieweit die Potentiale des Feldes eindeutig bestimmt sind. Das Feld wird durch die Wirkung charakterisiert, die es auf die Bewegung von Ladungen ausübt. Nun gehen in die Bewegungsgleichungen nicht die Potentiale, sondern die Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ ein. Zwei Felder sind daher physikalisch identisch, wenn sie dieselben Vektoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ besitzen. Sind die Potentiale $\boldsymbol{A}$ und φ gegeben, so sind gemäß (44,3) und (44,4) auch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ eindeutig bestimmt, und das Feld ist somit bekannt. Zu ein und demselben Feld gehören jedoch verschiedene Potentiale. Um sich davon zu überzeugen, addiere

man zu jeder Komponente A_μ des Potentials die Größe $-\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$, wo f eine willkürliche Funktion der Koordinaten und Zeit ist. A_μ geht dabei in

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{45,1}$$

über. Führen wir diese Substitution im Wirkungsintegral (43,1) durch, so läßt sich das auftretende Zusatzglied als vollständiges Differential schreiben:

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\,\mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}\left(\frac{e}{c}f\right), \tag{45,2}$$

das die Bewegungsgleichungen nicht beeinflußt (vgl. § 2).

Zerlegen wir das vierdimensionale Potential in das Vektor- und skalare Potential und schreiben wir statt x^μ wieder ct, x, y, z, so erhalten die vier Gleichungen (45,1) die Gestalt

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} f, \qquad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{45,3}$$

Man weist leicht direkt nach, daß sich das durch (44,3) und (44,4) gegebene elektrische und magnetische Feld in der Tat nicht ändert, wenn wir $\boldsymbol{A}$ und φ durch neue Potentiale $\boldsymbol{A}'$ und φ' ersetzen. Bei der Transformation (45,3) bleibt somit das Feld unverändert. Die Potentiale sind demgemäß nicht eindeutig bestimmt: Das Vektorpotential ist bis auf einen Gradienten einer beliebigen Funktion, das skalare bis auf die zeitliche Ableitung derselben Funktion festgelegt.

Speziell kann man also zum Vektorpotential einen beliebigen konstanten Vektor und zum skalaren eine beliebige Konstante addieren. Dies sieht man auch schon daraus, daß in $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ nur die Ableitungen von $\boldsymbol{A}$ und φ eingehen und deshalb die Addition von Konstanten die Feldstärken nicht verändert.

Physikalisch sinnvoll sind nur jene Größen, die gegenüber den Potentialtransformationen (45,3) invariant sind. Insbesondere müssen also alle Gleichungen gegen (45,3) invariant sein. Man nennt diese Invarianz *Eichinvarianz*.[1]

Diese Nichteindeutigkeit der Potentiale gibt uns immer die Möglichkeit, sie so zu wählen, daß sie eine beliebige Zusatzbedingung erfüllen; *eine* deshalb, weil uns in (45,3) nur *eine* willkürliche Funktion f zur Verfügung steht. Man kann etwa verlangen, daß $\varphi = 0$ ist. Das Vektorpotential läßt sich im allgemeinen nicht zum Verschwinden bringen, da $\boldsymbol{A} = 0$ drei Zusatzbedingungen darstellt (für die drei Komponenten von $\boldsymbol{A}$).

§ 46. Das zeitunabhängige elektromagnetische Feld

Statisch nennt man ein elektromagnetisches Feld, wenn es nicht von der Zeit abhängt. Es ist klar, daß man dann auch die Potentiale so wählen kann, daß

[1]) Dies liegt an der angenommenen Konstanz von e. Die Eichinvarianz der elektromagnetischen Gleichungen (s. unten) hängt eng mit der Ladungserhaltung zusammen.

sie nur Funktionen der Ortskoordinaten, nicht der Zeit, sind. Das statische Magnetfeld ist auch weiterhin durch $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ gegeben, während für das statische elektrische Feld

$$\boldsymbol{E} = - \operatorname{grad} \varphi \tag{46,1}$$

gilt. Das statische elektrische Feld hängt also nur vom skalaren Potential, das Magnetfeld nur vom Vektorpotential ab.

Wir stellten im vorangegangenen Paragraphen fest, daß die Potentiale des Feldes nicht eindeutig bestimmt sind. Man sieht jedoch leicht folgendes ein: Beschreiben wir das statische Feld durch zeitunabhängige Potentiale, so können wir, wenn sich das Feld nicht ändern soll, zum skalaren Potential nur eine (orts- und zeitunabhängige) Konstante hinzufügen. Gewöhnlich fordert man von dem Potential φ, daß es in einem gewissen Raumpunkt einen vorgegebenen Wert annehmen soll, meist wird das Verschwinden im Unendlichen verlangt. Dann ist auch die freigebliebene Konstante festgelegt und das skalare Potential eines statischen Feldes eindeutig bestimmt. Dagegen ist das Vektorpotential nicht eindeutig festgelegt; wir können zu $\boldsymbol{A}$ den Gradienten einer beliebigen Ortsfunktion addieren.

Wir wollen nun die Energie bestimmen, die eine Ladung im statischen Felde besitzt. Die LAGRANGE-Funktion der Ladung hängt hier nicht explizit von der Zeit ab. Das heißt, daß die Energie des geladenen Teilchens erhalten bleibt und mit der HAMILTON-Funktion zusammenfällt. Nach (43,6) folgt also

$$\mathfrak{E} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e \varphi . \tag{46,2}$$

Zur Energie des Teilchens kommt demnach das Zusatzglied $e \varphi$, die potentielle Energie einer Ladung im Felde. Hervorzuheben ist die wichtige Tatsache, daß die Energie nur vom skalaren, nicht vom Vektorpotential abhängt. Das Magnetfeld hat demnach keinen Einfluß auf die Energie der Ladung, diese wird vielmehr nur durch das elektrische Feld bestimmt. Dies hängt mit dem erwähnten Umstand zusammen, daß das Magnetfeld im Unterschied zum elektrischen keine Arbeit an der Ladung leistet.

Ist die Feldstärke an allen Orten dieselbe, so heißt das Feld *homogen*. Das skalare Potential eines homogenen elektrischen Feldes läßt sich mittels

$$\varphi = - \boldsymbol{E} \boldsymbol{r} \tag{46,3}$$

durch die Feldstärke ausdrücken, denn wir haben für $\boldsymbol{E} = \text{const}$ auch $\operatorname{grad} (\boldsymbol{E} \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{E} \nabla) \boldsymbol{r} = \boldsymbol{E}$.

Das Vektorpotential eines homogenen Magnetfeldes läßt sich ebenfalls in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke $\boldsymbol{H}$ schreiben:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{H} \boldsymbol{r}] . \tag{46,4}$$

Man überzeugt sich davon durch Anwendung einer vektoranalytischen Formel, die wir für $\boldsymbol{H} = \text{const}$ und mit $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$

$$\operatorname{rot} [\boldsymbol{H}\, \boldsymbol{r}] = \boldsymbol{H} \operatorname{div} \boldsymbol{r} - (\boldsymbol{H}\, \nabla)\, \boldsymbol{r} = 2\, \boldsymbol{H}$$

schreiben können.

§ 47. Bewegung in einem statischen homogenen elektrischen Feld

Wir untersuchen hier die Bewegung einer Ladung e in einem homogenen statischen elektrischen Feld $\boldsymbol{E}$. $\boldsymbol{E}$ habe die Richtung der x-Achse. Offenbar wird die Bewegung in einer Ebene verlaufen; etwa in der $x\, y$-Ebene. Die Bewegungsgleichung (44,5) erhält dann die Gestalt

$$\dot{p}_x = e\, E\,, \qquad \dot{p}_y = 0\,,$$

woraus

$$p_x = e\, E\, t\,, \qquad p_y = p_0 \tag{47,1}$$

folgt. Als Zeitanfangspunkt wurde hierbei der Augenblick gewählt, in dem p_x verschwindet; p_0 ist dann der Impuls des Teilchens zu diesem Zeitpunkt.

Die kinetische Energie des Teilchens (worunter wir Gesamtenergie ohne die potentielle Energie der Ladung im Felde verstehen) beträgt $\mathfrak{E}_{\text{kin}} = c\sqrt{m^2 c^2 + p^2}$. Setzen wir hierin (47,1) ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{E}_{\text{kin}} \doteq \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p_0^2 + (c\, e\, E\, t)^2} = \sqrt{\mathfrak{E}_0^2 + (c\, e\, E\, t)^2}\,. \tag{47,2}$$

$\mathfrak{E}_0$ ist die Energie für $t = 0$.

Die Geschwindigkeit eines Teilchens ist gemäß (39,11) durch $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{p}\, c^2/\mathfrak{E}_{\text{kin}}$ gegeben. Für die Komponente $v_x = \dot{x}$ haben wir also

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2\, e\, E\, t}{\sqrt{\mathfrak{E}_0^2 + (c\, e\, E\, t)^2}}\,.$$

Wenn wir integrieren, folgt

$$x = \frac{1}{e\, E}\sqrt{\mathfrak{E}_0^2 + (c\, e\, E\, t)^2} \tag{47,3}$$

(die Integrationskonstante wurde Null gesetzt).

Zur Bestimmung von y haben wir die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{p_y\, c^2}{\mathfrak{E}_{\text{kin}}} = \frac{p_0\, c^2}{\sqrt{\mathfrak{E}_0^2 + (c\, e\, E\, t)^2}}\,,$$

aus der wir

$$y = \frac{p_0\, c}{e\, E} \operatorname{Arsh} \frac{c\, e\, E\, t}{\mathfrak{E}_0} \tag{47,4}$$

erhalten.

Die Gleichung der Bahnkurve ergibt sich, wenn wir in (47,4) t durch y ausdrücken und diesen Wert für t in (47,3) einsetzen. Es folgt

$$x = \frac{\mathfrak{E}_0}{e\, E} \operatorname{ch} \frac{e\, E\, y}{p_0\, c}\,. \tag{47,5}$$

Eine Ladung in einem homogenen elektrischen Felde bewegt sich also auf einer Kettenlinie.

Für Teilchengeschwindigkeiten $v \ll c$ können wir $p_0 = m\, v_0$, $\mathfrak{E}_0 = m\, c^2$ setzen; entwickeln wir noch (47,5) nach Potenzen von $1/c$, so bekommen wir bis auf Terme höherer Ordnung

$$x = \frac{e\, E}{2\, m\, v_0^2}\, y^2 + \text{const}\,.$$

Die Ladung bewegt sich also auf einer Parabel, was aus der klassischen Mechanik bekannt ist.

§ 48. Bewegung in einem statischen homogenen Magnetfeld

Wir betrachten nun die Bewegung einer Ladung e in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{H}$. Die Richtung des Feldes sei die der z-Achse. Die Bewegungsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{e}{c}\,[\boldsymbol{v}\, \boldsymbol{H}]$$

schreiben wir um, indem wir statt des Impulses

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathfrak{E}\, \boldsymbol{v}}{c}$$

einführen. $\mathfrak{E}$ ist die im Magnetfeld konstante Energie des Teilchens. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$\frac{\mathfrak{E}}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{e}{c}\,[\boldsymbol{v}\, \boldsymbol{H}] \tag{48,1}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\dot{v}_x = \omega\, v_y\,, \qquad \dot{v}_y = -\,\omega\, v_x\,, \qquad \dot{v}_z = 0 \tag{48,2}$$

mit der Abkürzung

$$\omega = \frac{e\, c\, H}{\mathfrak{E}}\,. \tag{48,3}$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung in (48,2) mit i und addieren sie zur ersten:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(v_x + i\, v_y) = -\, i\, \omega\, (v_x + i\, v_y)\,,$$

woraus

$$v_x + i\, v_y = a\, \mathrm{e}^{-i\,\omega\, t}$$

mit a als komplexer Konstante erfolgt. a läßt sich in der Gestalt $a = v_{0t}\, e^{-i\alpha}$ schreiben, wobei v_{0t} und α reell sind. Es folgt

$$v_x + i\, v_y = v_{0\,t}\, \mathrm{e}^{-i(\omega\, t + \alpha)}$$

und nach Aufspaltung in den Real- und Imaginärteil

$$v_x = v_{0\,t} \cos\,(\omega\, t + \alpha)\,, \qquad v_y = -\, v_{0t} \sin\,(\omega\, t + \alpha)\,. \tag{48,4}$$

Die Konstanten v_{0t} und α werden durch die Anfangsbedingungen bestimmt: α ist die Anfangsphase und für v_{0t} folgt aus (48,4)

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\,,$$

d. h., v_{0t} ist die bei der Bewegung des Teilchens konstant bleibende Geschwindigkeit in der xy-Ebene.

Bei nochmaliger Integration finden wir aus (48,4)

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha)\,, \qquad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha) \tag{48,5}$$

mit

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\,\mathfrak{E}}{e\,c\,H} = \frac{c\,p_t}{e\,H} \tag{48,6}$$

(p_t ist die Projektion des Impulses auf die xy-Ebene). Aus der dritten Gleichung von (48,2) finden wir $v_z = v_{0z}$ und

$$z = z_0 + v_{0z}\,t\,. \tag{48,7}$$

Man entnimmt aus (48,5) und (48,7), daß sich eine Ladung im homogenen Magnetfeld auf einer Schraubenlinie bewegt, deren Achse parallel zur Richtung des Magnetfeldes ist und deren Radius r durch (48,6) bestimmt ist. Die Geschwindigkeit des Teilchens ist dabei dem Betrage nach konstant. Im Spezialfall $v_{0z} = 0$, wo die Ladung keine Geschwindigkeitskomponente in Feldrichtung hat, bewegt sie sich auf einem Kreis in einer zum Feld senkrechten Ebene.

Wie man aus den Formeln erkennt, ist ω die Kreisfrequenz bei der Rotation des Teilchens in dieser Ebene. Für kleine Geschwindigkeiten des Teilchens können wir $\mathfrak{E} = m\,c^2$ setzen. Die Frequenz ω geht dann in

$$\omega = \frac{e\,H}{m\,c} \tag{48,2}$$

über.

Aufgaben

1. Man bestimme die adiabatische Invariante für die Bewegung einer Ladung in einem homogenen Magnetfeld, dessen Größe und Richtung sich langsam mit der Zeit ändern.

Lösung: Da die Bewegung in der zum homogenen Magnetfeld senkrechten Ebene periodisch ist, stellt das Integral

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \boldsymbol{P}_t\, d\boldsymbol{l}$$

(vgl. § 32) eine adiabatische Invariante dar, wenn wir es über eine volle Periode der Bewegung erstrecken, in unserem Falle also über den Kreisumfang ($\boldsymbol{P}_t$ ist die Projektion des verallgemeinerten Impulses auf die erwähnte Ebene). Setzen wir $\boldsymbol{P}_t = \boldsymbol{p}_t + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}$, so haben wir

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint \boldsymbol{p}_t\, d\boldsymbol{l} + \frac{e}{2\pi c}\oint \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{l}\,.$$

Beim ersten Term können wir feststellen, daß $\boldsymbol{p}_t$ dem Betrage nach konstant ist und in die Richtung von $d\boldsymbol{l}$ fällt. Den zweiten Term formen wir nach dem STOKESschen Satz um und ersetzen rot $\boldsymbol{A}$ durch $\boldsymbol{H}$:

$$I = r\, p_t + \frac{e}{2\,c} H\, r^2\,,$$

hierbei ist r der Radius der Bahn. Für r benutzen wir den Ausdruck (48,6) und erhalten:

$$I = \frac{3\,c\,p_t^2}{2\,e\,H}\,.$$

Man sieht, daß sich bei einer langsamen Änderung von H der tangentiale Impuls p_t proportional zu $\sqrt{H}$ ändert.

2. Man bestimme die Schwingungsfrequenz eines geladenen räumlichen Oszillators in einem zeitunabhängigen homogenen Magnetfeld. Die Eigenfrequenz des Oszillators ohne Feld sei ω_0.

Lösung: Die Bewegungsgleichungen für die erzwungenen Schwingungen eines harmonischen Oszillators in einem in der z-Richtung befindlichen Magnetfeld haben die Gestalt

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \frac{e\,H}{m\,c}\,\dot{y}\,, \qquad \ddot{y} + \omega_0^2\, y = -\,\frac{e\,H}{m\,c}\,\dot{x}\,, \qquad \ddot{z} = +\,\omega_0^2\, z = 0\,.$$

Wir multiplizieren die zweite Gleichung mit i und addieren sie zur ersten:

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\,\xi = -\,i\,\frac{e\,H}{m\,c}\,\dot{\xi}\,,$$

$\xi = x + i\,y$. Hieraus ergibt sich, daß die Frequenz des Oszillators in der zum Feld senkrechten Ebene

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{e\,H}{m\,c}\right)^2} \pm \frac{e\,H}{2\,m\,c}$$

beträgt. Für ein schwaches Magnetfeld H geht diese Formel in

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{e\,H}{2\,m\,c}$$

über. Die Schwingungen in der Feldrichtung ändern sich nicht.

§ 49. Bewegung einer Ladung in gekreuzten Feldern

Zum Schluß betrachten wir die Bewegung einer Ladung in dem Fall, daß gleichzeitig homogene statische elektrische und magnetische Felder vorhanden sind. Wir beschränken uns dabei auf die nichtrelativistische Näherung, in der die Geschwindigkeit der Ladung klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist und für den Impuls $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$ gilt; wie wir sehen werden, muß dazu das elektrische Feld klein gegenüber dem Magnetfeld sein.

Die Richtung von $\boldsymbol{H}$ wählen wir zur z-Achse, die durch $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{E}$ verlaufende Ebene sei die xy-Ebene. Die Bewegungsgleichungen

$$m\,\dot{\boldsymbol{v}} = e\,\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\,[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{H}]$$

lassen sich dann in der Gestalt

$$m\,\ddot{x} = \frac{e}{c}\,\dot{y}\,H\,, \qquad m\,\ddot{y} = e\,E_y - \frac{e}{c}\,\dot{x}\,H\,, \qquad m\,\ddot{z} = e\,E_z \tag{49,1}$$

schreiben. Aus der dritten Gleichung entnimmt man, daß sich die Ladung längs der z-Achse gleichmäßig beschleunigt bewegt:

$$z = \frac{e\,E_z}{2\,m}\,t^2 + v_{0z}\,t\,. \tag{49,2}$$

Multiplizieren wir die zweite Gleichung aus (49,1) mit i und addieren sie zur ersten, so finden wir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x} + i\,\dot{y}) + i\,\omega\,(\dot{x} + i\,\dot{y}) = i\,\frac{e}{m}\,E_y$$

$\left(\omega = \frac{e\,H}{m\,c}\right)$. Das Integral dieser Gleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung dieser Gleichung ohne rechte Seite und einer speziellen Lösung der vollständigen Gleichung zusammen. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist $a\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$, eine spezielle der inhomogenen $\frac{c\,E_y}{m\,\omega} = \frac{c\,E_y}{H}$. Somit finden wir

$$\dot{x} + i\,\dot{y} = a\,\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t} + \frac{c\,E_y}{H}\,.$$

Die Konstante a ist im allgemeinen komplex. Schreiben wir sie in der Gestalt $a = b\,\mathrm{e}^{i\,\alpha}$ mit reellem b und α, so sehen wir, daß wir der Phasenkonstanten α durch Wahl des Anfangspunktes der Zeit beliebige Werte geben können (da a mit $\mathrm{e}^{-i\,\omega\,t}$ zu multiplizieren ist). Wir wählen sie so, daß a reell wird. Zerlegen wir dann $\dot{x} + i\,\dot{y}$ in den Real- und Imaginärteil, so folgt

$$\dot{x} = a\cos\omega\,t + c\,\frac{E_y}{H}\,, \qquad \dot{y} = -\,a\sin\omega\,t\,. \tag{49,3}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat die Geschwindigkeit die Richtung der x-Achse.

Man erkennt, daß die Geschwindigkeitskomponenten des Teilchens periodische Funktionen der Zeit sind. Ihre Mittelwerte sind

$$\bar{v}_x = \frac{c\,E_y}{H}\,, \qquad \bar{v}_y = 0\,. \tag{49,4}$$

Diese mittlere Geschwindigkeit der Ladung in gekreuzten Feldern nennt man elektrische Driftgeschwindigkeit. Ihre Richtung ist senkrecht zu beiden Feldern und hängt nicht vom Vorzeichen der Ladung ab.

Alle Gleichungen dieses Paragraphen gelten nur, wenn die Geschwindigkeit des Teilchens klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit ist. Wir sehen, daß dazu insbesondere nötig ist, daß die Felder die Bedingung

$$\frac{E_y}{H} \ll 1 \tag{49,5}$$

erfüllen, während die Absolutwerte von E_y und H beliebig sein können.

Integrieren wir die Gleichungen (49,3) nochmals mit der Bedingung $x = y = 0$ bei $t = 0$ für die Integrationskonstanten, so erhalten wir

$$x = \frac{a}{\omega} \sin \omega t + \frac{c E_y}{H} t , \qquad y = \frac{a}{\omega} (\cos \omega t - 1) . \tag{49,6}$$

Diese Gleichungen können wir als die Parameterdarstellung der Bahnkurve, die eine sogenannte Trochoide ist, ansehen. Je nachdem, ob der Betrag von a größer oder kleiner als der von $c E_y/H$ ist, hat die Projektion der Teilchenbahn auf die xy-Ebene die Gestalt von Abb. 30a oder 30b. Für $a = - c E_y/H$ geht (49,6) in

$$x = \frac{c E_y}{\omega H} (\omega t - \sin \omega t) , \qquad y = \frac{c E_y}{\omega H} (1 - \cos \omega t) \tag{49,7}$$

über und die Projektion der Bahn in die xy-Ebene entartet zu einer Zykloide (Abb. 30c).

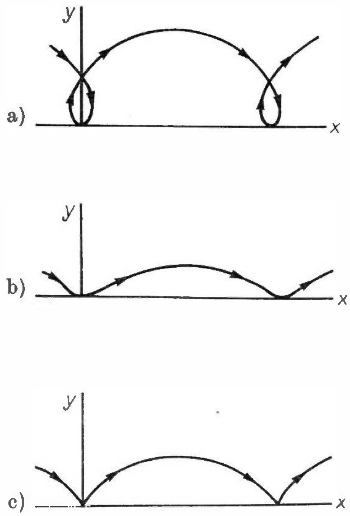


Abb. 30

§ 50. Der Tensor des elektromagnetischen Feldes

Die Formeln (44,3) und (44,4), die die Feldstärke durch deren Potential ausdrücken, sind in dreidimensionaler Darstellung gegeben und sind daher zur Aufklärung des Transformationsgesetzes dieser Größen bei Änderung des Bezugssystems ungeeignet.

Es ist leicht zu sehen, daß die Gesamtheit aller Komponenten beider dreidimensionaler Vektoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ als Gesamtheit der Komponenten des antisymmetrischen Vierertensors

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \tag{50,1}$$

dargestellt werden kann (er heißt *Tensor des elektromagnetischen Feldes* oder elektromagnetischer Feldstärketensor). Die Bedeutung der einzelnen Komponenten dieses Tensors ist leicht einzusehen, wenn man in (50,1) $A_\mu = (\varphi, -\boldsymbol{A})$ einsetzt. Das Ergebnis kann man in Form einer Tabelle niederschreiben, in der der Index $\mu = 0, 1, 2, 3$ die Zeilen und der Index ν die Spalten angibt:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{50,2}$$

Die kontravarianten Komponenten desselben Tensors unterscheiden sich durch Änderung des Vorzeichens beim Heben eines räumlichen Index:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{50,3}$$

Die Bewegungsgleichungen einer Ladung im Feld können mit Hilfe des Tensors $F_{\mu\nu}$ in der Form

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}s} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \tag{50,4}$$

geschrieben werden. Wenn man beide Seiten der Gleichung mit Hilfe der dreidimensionalen Größen (40,2), (40,5) und (50,3) ausdrückt (und $\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ berücksichtigt), so kann man sich leicht davon überzeugen, daß wir bei $\mu = 1, 2, 3$ die drei Komponenten der Vektorgleichung (44,6) und bei $\mu = 0$ die Gleichung für die Arbeit (44,7) erhalten.

Die Transformationsformeln für die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ kann man jetzt aus dem allgemeinen Transformationsgesetz (38,4) für einen Vierertensor entnehmen. Die Komponenten des Vierertensors zweiten Ranges $F^{\mu\nu}$ transformieren sich nun wie die Produkte der entsprechenden Koordinaten x^μ und x^ν. Bei der Lorentz-Transformation (36,3) ändern sich die Koordinaten $x^2 = y$ und $x^3 = z$ nicht, so daß auch F^{23} unverändert bleibt:

$$F^{23} = F'^{23}.$$

Aus dem gleichen Grunde werden F^{02}, F^{03} bzw. F^{12}, F^{13} wie die Koordinaten $x^0 = c\,t$ bzw. $x^1 = x$ transformiert:

$$F^{02} = \frac{F'^{02} + \frac{V}{c} F'^{12}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad F^{12} = \frac{F'^{12} + \frac{V}{c} F'^{02}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

und analog F^{03} und F^{13}. Schließlich muß sich die Komponente F^{01} wie das Produkt $x^0 x^1$ transformieren; demnach erhält man:

$$F^{01} = \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \left\{ F'^{01} + \frac{V^2}{c^2} F'^{10} + \frac{V}{c} (F'^{01} + F'^{10}) \right\}.$$

Da im vorliegenden Falle der Tensor $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, so ist $F'^{01} = -F'^{10}$ und

$$F^{01} = F'^{01}.$$

Wir drücken jetzt die Komponenten des Tensors $F^{\mu\nu}$ nach (50,2) durch die Komponenten des $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{H}$-Feldes aus und erhalten damit als Transformationsformeln für das elektrische Feld

$$E_x = E'_x, \qquad E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{50,5}$$

und für das Magnetfeld

$$H_x = H'_x, \qquad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{50,6}$$

Das elektrische und magnetische Feld sind somit, wie die meisten physikalischen Größen, relativ, d. h., sie besitzen in verschiedenen Bezugssystemen auch verschiedene Eigenschaften. Beispielsweise kann das elektrische Feld (oder das Magnetfeld) in einem System verschwinden, aber in einem anderen vorhanden sein.

Ist im System K' das Magnetfeld $\boldsymbol{H}' = 0$, so besteht nach (50,5), (50,6) zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld in K die Beziehung

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c} [\boldsymbol{V}\boldsymbol{E}]. \tag{50,7}$$

Verschwindet in K' das elektrische Feld: $\boldsymbol{E}' = 0$, dann gilt im System K

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} [\boldsymbol{V}\boldsymbol{H}]. \tag{50,8}$$

In beiden Fällen stehen demnach im System K das Magnetfeld und das elektrische Feld aufeinander senkrecht. Es gilt aber auch die Umkehrung: Stehen in irgendeinem Bezugssystem K die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ aufeinander senkrecht (sind dabei aber nicht betragsmäßig gleich), so gibt es ein Bezugssystem K', in dem das Feld nur elektrisch oder nur magnetisch ist.

§ 51. Invarianten des Feldes

Aus den Komponenten der Feldstärken des elektrischen und magnetischen Feldes lassen sich Invarianten bilden, die sich beim Übergang zu anderen Inertialsystemen nicht ändern.

Eine solche Größe erhalten wir, indem wir den vierdimensionalen Skalar $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ bilden. In dreidimensionaler Schreibweise hat er die Form $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 (H^2 - E^2)$. Somit ist eine der gesuchten Invarianten

$$H^2 - E^2 = \text{inv.} \tag{50,1}$$

Durch eine unmittelbare Überprüfung der Formeln (50,4) und (50,5) überzeugt man sich leicht, daß bei einer LORENTZ-Transformation auch die Summe $E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z$ erhalten bleibt. Somit ist

$$\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H} = \text{inv.} \tag{51,2}$$

Zwischen diesen beiden Invarianten gibt es jedoch einen prinzipiellen Unterschied hinsichtlich des Verhaltens bei einer Spiegelung (*Inversion*) des Raumkoordinatensystems — der gleichzeitigen Änderung des Vorzeichens der Koordinaten x, y, z. Wir erinnern daran, daß bei einer derartigen Transformation die Komponenten eines gewöhnlichen (*polaren*) Vektors ebenfalls das Vorzeichen wechseln. Die Komponenten eines Vektors, der durch ein Vektorprodukt zweier polarer Vektoren dargestellt werden kann, bleiben bei Inversion unverändert (solche Vektoren heißen *axial*). Das skalare Produkt zweier polarer oder zweier axialer Vektoren ist ein echter Skalar — er ändert sich nicht bei Inversion. Das skalare Produkt aus einem axialen und einem polaren Vektor ist ein *Pseudoskalar* — bei Inversion ändert er das Vorzeichen.

Nach den Definitionen (44,3) und (44,4) ist $\boldsymbol{E}$ ein polarer und $\boldsymbol{H}$ ein axialer Vektor (das Vektorprodukt der polaren Vektoren $\boldsymbol{\nabla}$ und $\boldsymbol{A}$). Danach ist es klar, daß $H^2 - E^2$ ein echter Skalar ist und $\boldsymbol{EH}$ ein Pseudoskalar (das Quadrat $(\boldsymbol{EH})^2$ ist wieder ein echter Skalar).

Aus der Invarianz der beiden Ausdrücke (51,1) und (51,2) lassen sich einige Folgerungen ziehen. Haben in einem Bezugssystem die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ den gleichen Betrag ($E^2 = H^2$), so sind diese Größen auch in jedem anderen Inertialsystem gleich. Steht in einem Bezugssystem das elektrische Feld senkrecht auf dem Magnetfeld, d. h. ist $\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H} = 0$, so sind beide Felder auch in jedem anderen System zueinander orthogonal.

Ist $\boldsymbol{EH} = 0$, so läßt sich ein Bezugssystem finden, in dem $\boldsymbol{E} = 0$ oder $\boldsymbol{H} = 0$ ist (je nachdem, ob $E^2 - H^2 < 0$ oder > 0 ist), also ein reines elektrisches oder ein reines Magnetfeld vorliegt. Verschwindet umgekehrt in einem Bezugssystem $\boldsymbol{E}$ oder $\boldsymbol{H}$, so stehen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ nach dem am Schluß des vorigen Paragraphen Gesagten auch in jedem anderen Bezugssystem aufeinander senkrecht.

Eine Ausnahme bildet der Fall, in dem beide Invarianten verschwinden ($\boldsymbol{EH} = 0$ und $E^2 - H^2 = 0$). Hier sind $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ in allen Bezugssystemen dem Betrage nach gleich und zueinander orthogonal.

Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes

XI

§ 52. Die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen

Aus den Ausdrücken

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi$$

erhält man in einfacher Weise Gleichungen, die nur noch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ enthalten. Dazu berechnen wir rot $\boldsymbol{E}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} - \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi .$$

Die Rotation eines Gradienten verschwindet, so daß sich

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{52,1}$$

ergibt. Weiter bilden wir auf beiden Seiten von $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ die Divergenz. Da auch die Divergenz einer Rotation Null liefert, folgt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 . \tag{52,2}$$

Die Gleichungen (52,1) und (52,2) bilden die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen.[1]) Sie bestimmen die Eigenschaften des Feldes noch nicht vollständig. Man sieht dies daran, daß sie zwar die zeitliche Änderung des Magnetfeldes ($\partial \boldsymbol{H}/\partial t$), aber nicht die des elektrischen Feldes ($\partial \boldsymbol{E}/\partial t$) zu berechnen gestatten.

Die Gleichungen (52,1) und (52,2) lassen sich in Integralform umschreiben. Nach dem Gaussschen Satz gilt

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{H} \, \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{H} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f} .$$

Links wird über ein Volumen integriert, rechts über die geschlossene Oberfläche, die dieses Volumen begrenzt. Nach (52,2) haben wir

$$\oint \boldsymbol{H} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = 0 . \tag{52,3}$$

Das über eine Oberfläche erstreckte Integral eines Vektors wird als *Fluß* (oder Strömung) *des Vektors* durch diese Oberfläche bezeichnet. (52,3) besagt also, daß der Fluß des Magnetfeldes durch jede geschlossene Fläche verschwindet. Nach dem Stokesschen Satze ist

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \oint \boldsymbol{E} \, \mathrm{d}\boldsymbol{l} ,$$

[1]) Die Maxwellschen Gleichungen, die Grundgleichungen der Elektrodynamik, wurden von Maxwell in den sechziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts gefunden.

wobei das rechte Integral sich über die geschlossene Begrenzungslinie derjenigen Fläche erstreckt, über die links integriert wird. Die Anwendung dieses Satzes auf die über eine solche beliebige Fläche integrierte Gleichung (52,1) liefert

$$\oint \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f}\,. \tag{52,4}$$

Das Integral eines Vektors über eine geschlossene Kurve wird Wirbel des Vektors in bezug auf diese Kurve genannt. Der Wirbel des elektrischen Feldes heißt auch *elektrische Ringspannung* oder *elektromotorische Kraft*. In Worten besagt (52, 4): Die elektrische Ringspannung über die geschlossene Randkurve irgendeiner Fläche ist gleich der negativen zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses durch diese Fläche.

§ 53. Das Wirkungsintegral des elektromagnetischen Feldes

Das Wirkungsintegral des aus dem elektromagnetischen Feld und den in ihm befindlichen Teilchen bestehenden Gesamtsystems hat man sich aus den Bestandteilen

$$S = S_f + S_m + S_{mf} \tag{53,1}$$

zusammengesetzt zu denken.

S_m ist derjenige Anteil der Wirkung, der nur von den Eigenschaften der Teilchen abhängt, also die Wirkungsfunktion freier Teilchen ohne Feld, wie sie durch (39,1) gegeben wird. Sind mehrere Teilchen vorhanden, so ist ihr Beitrag zur Wirkung gleich der Summe der Wirkungen für jedes einzelne Teilchen:

$$S_m = -\sum m\, c \int \mathrm{d}s\,. \tag{53,2}$$

Der Anteil S_{mf} wird durch die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feld hervorgerufen. Nach § 43 haben wir für ein System von Teilchen

$$S_{mf} = -\sum \frac{e}{c}\int A_\mu\, \mathrm{d}x^\mu\,. \tag{53,3}$$

In jedem Glied dieser Summe ist für A_μ das Potential des Feldes der Stelle einzusetzen, an der sich das entsprechende Teilchen gerade befindet. Die Summe $S_m + S_{mf}$ ist das uns schon bekannte Wirkungsintegral (43,1) für Ladungen im Felde.

S_f schließlich ist jener Anteil der Wirkung, der nur von den Eigenschaften des Feldes abhängt, d. h. das Wirkungsintegral des Feldes, wenn keine Ladungen vorhanden sind. Da wir uns bisher nur für die Bewegungen von Ladungen in einem vorgegebenen Felde interessierten, kümmerte uns dieser Anteil nicht, denn die Teilchenbewegung wird durch ihn nicht beeinflußt. Er ist jedoch zur Ableitung der Feldgleichungen nötig. Dem entspricht die Tatsache, daß wir aus dem Bestandteil $S_m + S_{mf}$ des Wirkungsintegrals nur zwei Gleichungen (52,1) und (52,2) ableiten konnten, die noch nicht zu einer vollständigen Bestimmung

des Feldes ausreichen. Um die Gestalt von S_f zu finden, gehen wir von einer sehr wichtigen Eigenschaft des elektromagnetischen Feldes aus: Erfahrungsgemäß gehorcht es dem sogenannten *Superpositionsprinzip*. Dieses Prinzip besagt folgendes: Das von einem System von Ladungen erzeugte Feld setzt sich einfach additiv aus den Feldern zusammen, die von jeder Ladung einzeln erzeugt werden. Die resultierende Feldstärke ist in jedem Punkt gleich der Vektorsumme der einzelnen Felder in diesem Punkt.

Jede Lösung der Feldgleichungen kann in der Natur verwirklicht sein. Nach dem Superpositionsprinzip muß die Summe von beliebigen derartigen Feldern wieder ein Feld liefern, das in der Natur auftreten kann, d. h. den Feldgleichungen genügen muß.

Die linearen Differentialgleichungen sind nun gerade durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß die Summe zweier Lösungen wieder eine Lösung ist. Die gesuchten Differentialgleichungen müssen also linear sein.

Dies bedeutet, daß der Integrand von S_f quadratisch in den Feldkomponenten ist. Nur in diesem Fall sind nämlich die Feldgleichungen linear, denn man erhält sie durch Variation des Wirkungsintegrals, wobei der Integrand um eine Ordnung erniedrigt wird.

In S_f können die Potentiale nicht auftreten, da sie nicht eindeutig bestimmt sind (für S_{mf} war diese Unbestimmtheit unwesentlich); S_f muß dann ein Integral über eine Funktion des elektromagnetischen Feldstärketensors $F_{\mu v}$ sein. Die Wirkung ist selbst ein Skalar und muß daher auch einen invarianten Integranden besitzen. Das kann nur das Produkt $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ sein.[1]) S_f muß somit die Gestalt

$$S_f = a \iint F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,\mathrm{d}V \,\mathrm{d}t\,, \qquad \mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

besitzen, wobei die Integration sich über den gesamten Ortsraum und das Zeitintervall zwischen zwei festen Zeitpunkten erstreckt. a ist eine Konstante. Unter dem Integral steht $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2\,(H^2 - E^2)$. Das $\boldsymbol{E}$-Feld enthält die Ableitungen $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$. Man erkennt leicht, daß $\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)^2$ in das Wirkungsintegral mit positivem (und daher auch E^2 mit positivem) Vorzeichen eingehen muß: Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man durch eine genügend rasche zeitliche Änderung des Potentials (im betrachteten Zeitintervall) einen beliebig großen negativen Wert für die Wirkung S_f erhalten; sie hätte dann aber kein Minimum, wie das Prinzip der kleinsten Wirkung verlangt. a muß also negativ sein.

Der Zahlenwert von a hängt von der Wahl des Maßsystems ab. Nach der Festlegung von a sind aber neben den Einheiten der Feldstärken auch die aller

[1]) Der Integrand von S_f kann keine Ableitungen von $F_{\mu\nu}$ enthalten, weil eine LAGRANGE-Funktion außer von den Koordinaten des Systems nur noch von den ersten zeitlichen Ableitungen der Koordinaten abhängt; die „Koordinaten" (d. h. die Veränderlichen, die im Wirkungsprinzip variiert werden) sind aber hier die Potentiale A_μ. Die Lage ist ganz ähnlich wie in der Mechanik, wo die LAGRANGE-Funktion eines mechanischen Systems nur die Koordinaten der Teilchen und ihre ersten Ableitungen nach der Zeit enthält.

anderen elektromagnetischen Größen bestimmt. Wir legen hier das GAUSS*sche Maßsystem* zugrunde. In ihm ist a die dimensionslose Zahl $-1/16\,\pi$.

Das Wirkungsintegral des Feldes lautet dann

$$S_f = -\frac{1}{16\,\pi\,c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d\Omega\,, \qquad d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz\,. \tag{53,4}$$

Die dreidimensionale Gestalt ist

$$S = \frac{1}{8\,\pi}\int\int (E^2 - H^2)\,dV\,dt\,, \tag{53,5}$$

woraus sich die LAGRANGE-Funktion des Feldes zu

$$L_f = \frac{1}{8\,\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV \tag{53,6}$$

ergibt. Das gesamte Wirkungsintegral von Feld und Ladungen schreibt sich

$$S = -\sum\int m\,c\,ds - \sum\int\frac{e}{c}A_\mu\,dx^\mu - \frac{1}{16\,\pi\,c}\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,d\Omega\,. \tag{53,7}$$

Es ist wichtig, daß hier die Ladungen keineswegs klein zu sein brauchen, wie wir dies bei der Ableitung der Bewegungsgleichungen einer Ladung in einem vorgegebenen Feld vorausgesetzt haben. A_μ und $F_{\mu\nu}$ stellen daher das tatsächliche (Gesamt-)Feld dar, d. h. die Summe äußeres Feld plus von den Ladungen erzeugtes Feld. Dieses Feld hängt dann auch von Lage und Geschwindigkeit der Ladungen ab.

§ 54. Der Vierervektor des Stromes

Anstatt die Ladungen als punktförmig zu betrachten, ist es häufig aus mathematischen Gründen bequem, sie als im Raume stetig verteilt anzunehmen. Man führt dann eine Ladungsdichte ϱ derart ein, daß $\varrho\,dV$ der im Volumenelement dV enthaltene Anteil der Ladung ist. ϱ hängt im allgemeinen vom Ort und von der Zeit ab. Integrieren wir ϱ über ein Raumgebiet, so erhalten wir die darin befindliche Ladung.

Da in Wirklichkeit die Ladungen punktförmig sind, ist die Dichte ϱ an allen Stellen außer an den Orten der Ladungen Null zu setzen; das Integral $\int\varrho\,dV$ muß jedoch gleich der Summe aller Ladungen sein, die sich in dem Integrationsgebiet befinden. ϱ läßt sich dann durch eine δ-Funktion[1]) wie folgt ausdrücken:

$$\varrho = \sum_a e_a\,\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a)\,. \tag{54,1}$$

[1]) Die δ-Funktion wird folgendermaßen definiert: $\delta(x) = 0$ für alle $x \neq 0$, für $x = 0$ sei $\delta(0) = \infty$ derart, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx = 1 \tag{I}$$

Die Summation erstreckt sich über alle Ladungen, $\boldsymbol{r}_a$ ist der Radiusvektor der Ladung e_a.

Die Ladung eines Teilchens ist laut Definition eine Invariante, d. h. vom Bezugssystem unabhängig. Dies gilt jedoch nicht für die Ladungsdichte ϱ: Erst $\varrho \cdot \mathrm{d}V$ ist invariant.

Wir multiplizieren $\mathrm{d}e = \varrho \, \mathrm{d}V$ auf beiden Seiten mit $\mathrm{d}x^\mu$:

$$\mathrm{d}e \, \mathrm{d}x^\mu = \varrho \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}x^\mu = \varrho \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}t \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} .$$

Links steht ein Vierervektor (denn $\mathrm{d}e$ ist ein Skalar, $\mathrm{d}x^\mu$ ein Vierervektor), daher muß auch die rechte Seite einen solchen bilden. $\mathrm{d}V \, \mathrm{d}t$ ist aber ein Skalar, so daß $\varrho \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}$ einen Vierervektor darstellt. Dieser Vektor, den wir mit j^μ bezeichnen wollen, wird *Stromvierervektor* genannt:

$$j^\mu = \varrho \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} . \tag{54,2}$$

Die drei räumlichen Komponenten von j^μ bilden den dreidimensionalen Vektor der *Stromdichte*

$$\boldsymbol{j} = \varrho \, \boldsymbol{v} \tag{54,3}$$

mit $\boldsymbol{v}$ als Geschwindigkeit der Ladung. Die vierte Komponente ist $c \, \varrho$. Wir haben also

$$j^\mu = (c \, \varrho, \boldsymbol{j}) . \tag{54,4}$$

(Fortsetzung Fußnote 1, Seite 162)
ist. Aus dieser Definition folgt, daß für eine beliebige stetige Funktion $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta(x - a) \, \mathrm{d}x = f(a) \tag{II}$$

gilt; im besonderen also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, \delta(x) \, \mathrm{d}x = f(0) . \tag{III}$$

(Die Integrationsgrenzen brauchen natürlich nicht $\pm \infty$ zu sein. Das Integrationsgebiet ist beliebig, muß aber den Punkt enthalten, in dem die δ-Funktion nicht verschwindet.)

Es gelten weiter die Gleichungen

$$\delta(-x) = \delta(x), \qquad \delta(a\,x) = \frac{1}{|a|} \delta(x) ; \tag{IV}$$

ihre Bedeutung besteht darin, daß die linken und rechten Seiten dasselbe Ergebnis liefern, wenn sie als Faktor in einem Integranden auftreten. Entsprechend der eindimensionalen Funktion $\delta(x)$ kann man auch die dreidimensionale δ-Funktion $\delta(\boldsymbol{r})$ einführen, die überall verschwindet, ausgenommen am Ursprung des räumlichen Koordinatensystems, und deren über den ganzen Raum erstrecktes Integral wieder 1 ist. Man kann sie als Produkt $\delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta(z)$ darstellen.

Wir setzen nun den Stromvierervektor in das Wirkungsintegral (53,7) ein. Dazu schreiben wir den zweiten Term von (53,7) um, indem wir die Punktladung e durch eine stetige Ladungsverteilung ϱ ersetzen:

$$-\frac{1}{c}\int \varrho\, A_\mu\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}V\,.$$

Die Summierung über die Ladungen wird hier durch die Integration über den ganzen Raum ersetzt. Das Integral läßt sich nun schreiben als

$$-\frac{1}{c}\int \varrho\, \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t}\, A_\mu\, \mathrm{d}V\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{c^2}\int A_\mu\, j^\mu\, \mathrm{d}\Omega\,.$$

Das Wirkungsintegral nimmt also die Gestalt

$$S = -\sum \int m\, c\, \mathrm{d}s - \frac{1}{c^2}\int A_\mu j^\mu\, \mathrm{d}\Omega - \frac{1}{16\,\pi\, c}\int F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu}\, \mathrm{d}\,\Omega \qquad (54,5)$$

an.

§ 55. Die Kontinuitätsgleichung

Der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, \mathrm{d}V$$

gibt uns die zeitliche Änderung der im Integrationsgebiet befindlichen Ladung an. Andererseits wird diese Größe durch die Ladungsmenge bestimmt, die in der Zeiteinheit aus dem Gebiet heraus oder in das Gebiet hineinfließt. Die sich in der Zeiteinheit durch das Oberflächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ des Gebietes bewegende Ladung ist $\varrho\, \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$, mit $\boldsymbol{v}$ als Geschwindigkeit der Ladung an der Stelle des Oberflächenelementes $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$. In üblicher Weise nehmen wir an, daß der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ die äußere Normale der Oberfläche darstellt, d. h. von dem betrachteten Gebiet nach außen zeigt. Dann ist $\varrho\, \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} \equiv \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$ positiv, wenn Ladung das Gebiet verläßt und negativ, wenn sie in das Gebiet eintritt. Die gesamte Ladungsmenge, die in der Zeiteinheit das Gebiet verläßt, wird dann durch das über die geschlossene Oberfläche des Gebietes erstreckte Integral $\oint \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$ gegeben.

Durch Vergleich der beiden erhaltenen Ausdrücke finden wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\, \mathrm{d}V = -\oint \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f}\,. \qquad (55,1)$$

Rechts steht ein Minuszeichen, da der linke Teil positiv ist, wenn sich die Gesamtladung des Gebietes vergrößert. (55,1) drückt die Erhaltung der Ladung aus und ist die in Integralform geschriebene sogenannte *Kontinuitätsgleichung*.

Wir überführen diese Gleichung nun in die Differentialform. Wenn wir den Gaussschen Satz

$$\oint \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int \operatorname{div} \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}V$$

auf die rechte Seite von (55,1) anwenden, ergibt sich

$$\int \left(\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) \mathrm{d} V = 0 .$$

Diese Gleichung muß für ein beliebiges Integrationsgebiet gelten, was nur möglich ist, wenn der Integrand verschwindet:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 . \tag{55,2}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung in Differentialform.

Stellen wir ϱ durch δ-Funktionen nach (54,1) dar, so ist, wie man leicht sieht, die Kontinuitätsgleichung von selbst erfüllt. Der Einfachheit halber werde nur eine Ladung genommen:

$$\varrho = e\, \delta (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) .$$

Der Strom $\boldsymbol{j}$ ist dann

$$\boldsymbol{j} = e\, \boldsymbol{v}\, \delta (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)$$

mit $\boldsymbol{v}$ als Geschwindigkeit der Ladung. Wir bilden nun die Ableitungen $\frac{\partial \varrho}{\partial t}$. Bei einer Bewegung der Ladung ändern sich ihre Koordinaten, d. h. $\boldsymbol{r}_0$. Daher folgt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{\partial \varrho}{\partial \boldsymbol{r}_0} \frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial t} .$$

$\frac{\partial \boldsymbol{r}_0}{\partial t}$ ist hierin die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ der Ladung. Weiterhin ergibt sich daraus, daß ϱ eine Funktion von $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ ist:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \boldsymbol{r}_0} = - \frac{\partial \varrho}{\partial \boldsymbol{r}} .$$

Wir haben demnach

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = - \boldsymbol{v} \operatorname{grad} \varrho = - \operatorname{div} \varrho \boldsymbol{v} ,$$

da die Geschwindigkeit der Ladung $\boldsymbol{v}$ von $\boldsymbol{r}$ unabhängig ist, d. h. (55,2) ist erfüllt.

In vierdimensionaler Gestalt besagt die Kontinuitätsgleichung das Verschwinden der vierdimenionalen Divergenz des Stromvierervektors:

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 . \tag{55,3}$$

§ 56. Die zweite Gruppe der MAXWELLschen Gleichungen

Zur Ableitung der Feldgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung müssen wir die Bewegung der Ladungen als gegeben voraussetzen und nur die Potentiale der Felder variieren, die hier die Rolle „verallgemeinerter Koordinaten" des Systems haben (bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen eines

Teilchens haben wir umgekehrt das Feld als gegeben angesehen und die Bahnkurve des Teilchens variiert). Die Ableitung wird zweckmäßigerweise vierdimensional durchgeführt.

Nach dem Gesagten verschwindet die Variation des ersten Gliedes in (54,5) und im zweiten darf der Strom j^μ nicht mitvariiert werden. Somit folgt

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}\right]d\Omega = 0\,.$$

Bei der Variation wurde im 2. Glied $F^{\mu\nu}\,\delta F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}\delta F^{\mu\nu}$ berücksichtigt. Setzen wir

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}\,,$$

so erhalten wir:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^\mu\,\delta A_\mu + \frac{1}{8\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\nu - F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu\right\}d\Omega\,.$$

Im zweiten Glied vertauschen wir die Summationsindizes μ und ν und ersetzen $F^{\nu\mu}$ durch $-F^{\mu\nu}$. Dann sind das zweite und dritte Glied gleich, und wir erhalten:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^\mu\,\delta A_\mu - \frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu\right\}d\Omega\,.$$

Schreiben wir weiterhin

$$-\frac{1}{4\pi}F^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\delta A_\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(F^{\mu\nu}\,\delta A_\mu) + \frac{1}{4\pi}\delta A_\mu\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}$$

und verwenden zur Integration des ersten Gliedes den vierdimensionalen Gaussschen Satz (38,7), so erhalten wir:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^\mu + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\right\}\delta A_\mu\,d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{\mu\nu}\,\delta A_\mu\,dS_\nu\,. \tag{56,1}$$

Unter dem letzten Term versteht man dessen Wert an den Integrationsgrenzen. Die räumlichen Integrationsgrenzen liegen im Unendlichen, wo das Feld verschwindet. An den Grenzen der Zeitintegration, d. h. zum vorgegebenen Anfangs- und Endpunkt, muß die Variation der Potentiale verschwinden, da gemäß dem Sinn des Prinzips der kleinsten Wirkung die Potentiale zu diesen Zeitpunkten gegeben sind. Das zweite Glied in (56,1) ist also stets Null, und wir erhalten die Bedingung für das Minimum der Wirkung in der Form

$$\int\left(\frac{1}{c}j^\mu + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu}\right)\delta A_\mu\,d\Omega = 0\,.$$

Wegen der Willkürlichkeit der Variationen δA_μ muß der in Klammern stehende Integrand verschwinden:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\mu\,. \tag{56,2}$$

Wir schreiben diese vier Gleichungen ($\mu = 0, 1, 2, 3$) in dreidimensionaler Form. Die zweite ($\mu = 1$) lautet

$$\frac{1}{c}\frac{\partial F^{10}}{\partial t} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x} + \frac{\partial F^{12}}{\partial y} + \frac{\partial F^{13}}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j^1 ,$$

oder wenn wir die Komponenten von $F^{\mu\nu}$ einsetzen

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c} j_x .$$

Zusammen mit den für $\mu = 2, 3$ entstehenden Gleichungen kann diese Gleichung in vektorieller Gestalt geschrieben werden:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} . \tag{56,3}$$

Die erste Gleichung ($\mu = 0$) ergibt schließlich

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\varrho . \tag{56,4}$$

Die Gleichungen (56,3) und (56,4) stellen die gesuchte zweite Gruppe der MAXWELLschen Gleichungen dar.[1])

Zusammen mit der ersten Gruppe bestimmen sie das elektromagnetische Feld vollständig und bilden die Grundgleichungen der Theorie dieser Felder, der *Elektrodynamik.*

Wir geben nun eine Integralformulierung dieser Gleichungen. Integrieren wir (56,4) über ein beliebiges Raumgebiet, so erhalten wir nach dem GAUSSschen Satz

$$\int \operatorname{div} \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}V = \oint \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

die Beziehung

$$\oint \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = 4\pi \int \varrho\, \mathrm{d}V . \tag{56,5}$$

Der Fluß des elektrischen Feldes durch eine geschlossene Oberfläche ist also gleich der mit 4π multiplizierten Gesamtladung des durch die Oberfläche begrenzten Raumgebietes.

Die Integration von (45,3) über eine nicht geschlossene Oberfläche liefert mit dem STOKESschen Satz

$$\int \operatorname{rot} \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \oint \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

die Gleichung

$$\oint \boldsymbol{H}\, \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \boldsymbol{E}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} + \frac{4\pi}{c}\int \boldsymbol{j}\, \mathrm{d}\boldsymbol{f} . \tag{56,6}$$

Die Größe

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{56,7}$$

[1]) Die MAXWELLschen Gleichungen für das Vakuum mit darin bewegten Punktladungen wurden von LORENTZ formuliert.

heißt *Verschiebungsstrom.* In der Form

$$\oint \boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\int\left(\boldsymbol{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{f}$$

geschrieben besagt die Gleichung (56,6), daß der Wirbel des Magnetfeldes längs einer beliebigen geschlossenen Kurve, die als Rand irgendeine Fläche begrenzt, gleich der mit $4\pi/c$ multiplizierten Summe des durch die Fläche fließenden wahren Stromes und des Verschiebungsstromes ist.

Aus den MAXWELLschen Gleichungen läßt sich die uns schon bekannte Kontinuitätsgleichung ableiten. Bilden wir auf beiden Seiten von (56,3) die Divergenz, so folgt

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\operatorname{div}\boldsymbol{j}\,.$$

Wegen $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \equiv 0$ und $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\varrho$ nach (56,4) gelangen wir somit wieder zu Gleichung (55,2).

§ 57. Energiedichte und Energiestrom

Wir multiplizieren die Gleichung (56,3) mit $\boldsymbol{E}$, (52,1) mit $\boldsymbol{H}$ und addieren die beiden erhaltenen Gleichungen:

$$\frac{1}{c}\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\boldsymbol{H}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H})\,.$$

Mit der bekannten vektoranalytischen Formel

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$$

schreiben wir diese Beziehung zu

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{c\,\partial t}(E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{E} - \operatorname{div}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{E} - \operatorname{div}\boldsymbol{S} \qquad (57,1)$$

um. Der hier auftretende Vektor

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}] \qquad (57,2)$$

heißt POYNTING-*Vektor.*

Weiter integrieren wir (57,1) über irgendein Raumgebiet und wenden auf das zweite Glied der rechten Seite den GAUSSschen Satz an. Es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,\mathrm{d}V = -\int\boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V - \oint\boldsymbol{S}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}\,. \qquad (57,3)$$

Erstreckt sich die Integration über den ganzen Raum, so verschwindet das Oberflächenintegral, da das Feld im Unendlichen gegen Null strebt. Ferner

können wir das Integral $\int \boldsymbol{j}\,\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V$ als Summe $\sum e\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{E}$ über alle Ladungen im Felde schreiben und nach (44,7)

$$e\,\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathfrak{E}_{\mathrm{kin}}$$

setzen. (57,3) geht dann in

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,\mathrm{d}V + \sum \mathfrak{E}_{\mathrm{kin}}\right\} = 0 \tag{57,4}$$

über.

Die in Klammern stehende Größe bleibt daher für das aus dem elektromagnetischen Feld mit darin sich bewegenden Ladungen bestehende abgeschlossene System erhalten. Das zweite Glied der Klammer ist die kinetische Energie aller Teilchen (ihre Ruhenergie ist darin einbegriffen, siehe die Anmerkung auf Seite 145). Der erste Bestandteil der Klammer ist daher als Eigenenergie des elektromagnetischen Feldes zu deuten. Die Größe

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \tag{57,5}$$

die Feldenergie pro Volumeneinheit, ist dann die *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes.

Bei der Integration über ein anderes Gebiet verschwindet das Oberflächenintegral in (57,3) im allgemeinen nicht und wir müssen diese Gleichungen in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,\mathrm{d}V + \sum \mathfrak{E}_{\mathrm{kin}}\right\} = -\oint \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f} \tag{57,6}$$

schreiben, wobei sich das Summenzeichen auf der linken Seite nur auf die Teilchen bezieht, die sich innerhalb des betrachteten Gebietes befinden. Links steht die auf die Zeiteinheit bezogene Änderung der Gesamtenergie von Feld und Teilchen. Das Integral $\oint \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ hat man daher als Energiestrom des Feldes durch die gesamte Oberfläche des Gebietes zu betrachten, so daß der POYNTING-Vektor $\boldsymbol{S}$ die Dichte dieses Energiestromes ist, d. h. den Energiebetrag angibt, der in der Zeiteinheit durch das Einheitsoberflächenelement fließt.

§ 58. Impulsdichte und Impulsstrom

Ebenso wie die Energie besitzt auch der Impuls des elektromagnetischen Feldes eine bestimmte räumlich verteilte Dichte. Den Ausdruck für diese Dichte kann man analog zu der im vorigen Paragraphen durchgeführten Ableitung über die Feldstärken erhalten.

Wir berechnen die zeitliche Ableitung des Integrals

$$\int \frac{1}{4\pi c}\,[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}]\,\mathrm{d}V\,.$$

Wenn wir den Integranden differenzieren und die Ableitungen $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ und $\partial \boldsymbol{H}/\partial t$ entsprechend den MAXWELLschen Gleichungen (52,1) und (56,3) ersetzen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]}{4\pi c}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi c}\int \left[\boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right]\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi c}\int\left[\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\boldsymbol{H}\right]\mathrm{d}V$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\{[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}] + [\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}]\}\,\mathrm{d}V - \frac{1}{c}\int[\boldsymbol{j}\boldsymbol{H}]\,\mathrm{d}V\,.$$

Im ersten Integral wandeln wir den Integranden nach einer Formel der Vektoranalysis um,

$$\nabla(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}) = [\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}] + (\boldsymbol{a}\nabla)\,\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\nabla)\,\boldsymbol{a}\,,$$

und erhalten damit:

$$[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}] = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\boldsymbol{E}\nabla)\,\boldsymbol{E}\,.$$

Ferner ersetzen wir

$$(\boldsymbol{E}\nabla)\,\boldsymbol{E} = (\nabla\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\,(\nabla\boldsymbol{E})\,,$$

wobei der Term $(\nabla\boldsymbol{E})\boldsymbol{E}$ so zu verstehen ist, daß der ∇-Operator auf beide ihm folgenden Faktoren wirkt. Wenn wir schließlich entsprechend der MAXWELLschen Gleichung (56,4) $\nabla\boldsymbol{E} \equiv \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\varrho$ setzen, so können wir

$$[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}] = \frac{1}{2}\nabla E^2 - (\nabla\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E} + 4\pi\varrho\,\boldsymbol{E}$$

schreiben. In analoger Weise wandelt man das Produkt $[\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}]$ um und erhält, unter Berücksichtigung von $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$:

$$[\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}] = \frac{1}{2}\nabla H^2 - (\nabla\boldsymbol{H})\,\boldsymbol{H}\,.$$

Somit folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]}{4\pi c}\,\mathrm{d}V = -\int\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}\nabla(E^2 + H^2) - (\nabla\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{E} - (\nabla\boldsymbol{H})\,\boldsymbol{H}\right\}\mathrm{d}V$$

$$-\int\left\{\varrho\,\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{j}\boldsymbol{H}]\right\}\mathrm{d}V\,. \qquad (58{,}1)$$

Im Integranden des ersten Integrals wirkt der ∇-Operator auf alle nach ihm stehenden Faktoren. Gemäß den Lehrsätzen der Vektoranalysis (allgemeine Formulierung des GAUSSschen Satzes) wird dieses Integral in ein Oberflächenintegral verwandelt, indem man den Operator $\mathrm{d}V\cdot\nabla$ durch das Oberflächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ ersetzt. Das zweite Integral, in dem die Dichte und der Strom der Ladungen auftreten, schreiben wir um als Summe über die punktförmigen Ladungen, die sich im Innern des vorgegebenen Volumens befinden. Die Glei-

chung (58,1) kann man somit in der Gestalt

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]}{4\pi c}\,\mathrm{d}V = -\oint\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{E^2+H^2}{2}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f} - \boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f}) - \boldsymbol{H}\,(\boldsymbol{H}\,\mathrm{d}\boldsymbol{f})\right\}$$
$$-\sum e\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{H}]\right) \tag{58,2}$$

darstellen. Wird die Integration über den gesamten Raum erstreckt, so verschwindet das Integral über die (unendlich entfernte) Oberfläche. Der in (58,2) unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck stellt die auf die Ladung wirkende Kraft dar. Entsprechend der Bewegungsgleichung (44,5) kann man sie durch die Ableitung $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ des Teilchenimpulses ersetzen. Dann kann man de Gleichung (58,2) in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\frac{[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]}{4\pi c}\,\mathrm{d}V+\sum\boldsymbol{p}\right\}=0 \tag{58,3}$$

schreiben.

Sie ist offensichtlich Erhaltungssatz für den Gesamtimpuls des Teilchensystems und des Feldes. Der erste Term in der auftretenden Klammer ist demnach der Impuls des elektromagnetischen Feldes und der Integrand kann als Impulsdichte angesehen werden; wir bezeichnen sie mit $\boldsymbol{P}^{(\mathrm{em})}$:

$$\boldsymbol{P}^{(\mathrm{em})}=\frac{[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]}{4\pi c}=\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}\,. \tag{58,4}$$

Wir sehen, daß die Impulsdichte (bis auf den konstanten Faktor $1/c^2$) mit der Energiestromdichte des Feldes übereinstimmt.

Wenn die Integration des linken Teiles von (58,2) über ein endliches Volumen des Feldes durchgeführt wird, so verschwindet das Oberflächenintegral nicht. Wir schreiben es in kompakterer Form, indem wir den dreidimensionalen Tensor

$$\sigma_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{E^2+H^2}{2}\,\delta_{ik}-E_i\,E_k-H_i\,H_k\right\} \tag{58,5}$$

einführen. Seine Komponenten sind

$$\sigma_{xx}=\frac{1}{8\pi}(E_y^2+E_z^2-E_x^2+H_y^2+H_z^2-H_x^2)\,,$$

$$\sigma_{xy}=-\frac{1}{4\pi}(E_x\,E_y+H_x\,H_y)$$

usw.

Der Integrand im Oberflächenintegral von (58,2) ist ein Vektor; mit Hilfe des Tensors (58,5) schreibt sich seine i-te Komponente in der Form $\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k$. Somit erhält die Vektorgleichung (58,2) der Impulserhaltung in Komponentendarstellung die Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int P_i^{(\mathrm{em})}\,\mathrm{d}V+\sum p_i\right\}=-\oint\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k\,. \tag{58,6}$$

Hieraus wird klar, daß das Integral auf der rechten Seite der Gleichung den Impulsstrom des Feldes darstellt, der aus dem betrachteten Volumen herausfließt. Das Produkt $\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k$ ist der Impulsstrom durch das Oberflächenelement $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$. Seiner Definition nach zeigt der Vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ nach außen in Richtung der Flächennormalen. Wenn man den Einheitsvektor der Normalen mit $\boldsymbol{N}$ bezeichnet, so ist $\mathrm{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{N}\,\mathrm{d}f$. Damit wird

$$\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k = \sigma_{ik}\,N_k\,\mathrm{d}f\,,$$

Wir sehen, daß der Vektor mit den Komponenten $\sigma_{ik}\,N_k$ die Dichte des Impulsstromes in Richtung N darstellt, d. h., es ist der Strom durch die Einheitsfläche senkrecht zu N. Setzen wir σ_{ik} aus (58,5) ein, so wird dieser Vektor gleich

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\boldsymbol{E}^2+\boldsymbol{H}^2}{2}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{H})\right\}. \tag{58,7}$$

Der Tensor σ_{ik} heißt MAXWELL*scher Spannungstensor.* Nach dem weiter oben Gesagten ist die Komponente σ_{ik} die Stromdichte der i-ten Impulskomponente in Richtung der Achse x^k. Wie man aus (58,5) sieht, ist der Spannungstensor symmetrisch ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$).

Das zeitunabhängige elektromagnetische Feld XII

§ 59. Das Coulombsche Gesetz

Für ein zeitunabhängiges elektrisches (*elektrostatisches*) Feld nehmen die Maxwellschen Gleichungen die Gestalt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\,\pi\,\varrho\,, \tag{59,1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0 \tag{59,2}$$

an. Das elektrische Feld leitet sich nur vom skalaren Potential gemäß

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{59,3}$$

ab. Setzen wir (59,3) in (59,1) ein, so finden wir die Gleichung, der das Potential eines elektrostatischen Feldes genügen muß:

$$\Delta\varphi = -\,4\,\pi\,\varrho\,. \tag{59,4}$$

Sie heißt Poisson-*Gleichung*. Im Vakuum, wo ϱ verschwindet, erfüllt das Potential die Laplace-*Gleichung*

$$\Delta\varphi = 0\,. \tag{59,5}$$

Aus der Laplace-Gleichung folgt insbesondere, daß das Potential weder ein Maximum noch Minimum besitzen kann. Für ein Extremum wäre erforderlich, daß alle ersten Ableitungen von φ nach den Koordinaten verschwinden und die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ ein einheitliches Vorzeichen haben. Die zweite Bedingung ist jedoch unerfüllbar, da dann (59,5) nicht mehr gelten kann.

Wir suchen das von einer Punktladung erzeugte Feld. Aus Symmetriegründen muß es in jedem Punkte in der Richtung des von der Ladung ausgehenden Radiusvektors liegen. Weiter darf aus denselben Gründen der Betrag E des Feldes nur von der Entfernung R zwischen Aufpunkt und Ladung abhängen. Um E zu finden, benutzen wir die Gleichung (59,1) in der Integralform (56,5). Der Fluß des elektrischen Feldes durch eine Kugelfläche mit dem Radius R um die Ladung e beträgt $4\,\pi\,R^2\,E$ und muß gleich $4\,\pi\,e$ sein. Daraus finden wir

$$E = \frac{e}{R^2}$$

oder in vektorieller Gestalt

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\,\boldsymbol{R}}{R^3}\,. \tag{59,6}$$

Das von einer Punktladung erzeugte Feld ist also umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung von der Ladung (COULOMBsches *Gesetz*). Das Potential dieses Feldes ist

$$\varphi = \frac{e}{R}. \tag{59,7}$$

Bei einem System von Ladungen ist das von ihnen hervorgerufene Feld nach dem Superpositionsprinzip gleich der Summe der Felder, die jede einzelne Ladung erzeugt. Das Potential eines solchen Feldes hat die Gestalt

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}, \tag{59,8}$$

wo R_a die Entfernung von der Ladung e_a bis zu dem Punkt bedeutet, an dem wir das Potential bestimmen wollen. Führen wir die Ladungsdichte ϱ ein, so nimmt diese Gleichung die Gestalt

$$\varphi = \int \frac{\varrho}{R} \, \mathrm{d} V \tag{59,9}$$

an, R ist die Entfernung des Volumenelementes $\mathrm{d}V$ zum gegebenen Punkt des Feldes („Aufpunkt").

Setzen wir in (59,4) für ϱ und φ die Werte einer Punktladung, d. h. $\varrho = e\,\delta(\boldsymbol{R})$, $\varphi = e/R$, so erhalten wir die Beziehung

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\,\delta(\boldsymbol{R}). \tag{59,10}$$

§ 60. Die elektrostatische Energie eines Systems von Ladungen

Wir wollen nun die potentielle Energie eines Systems von Ladungen bestimmen. Dazu gehen wir von dem Ausdruck (57,5) für die Energiedichte des Feldes aus, der uns für die gesuchte Energie den Wert

$$U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \, \mathrm{d} V$$

liefert. $\boldsymbol{E}$ ist das von den Ladungen erzeugte Feld, das Integral ist über den ganzen Raum zu erstrecken. Setzen wir $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ ein, so können wir U folgendermaßen schreiben:

$$U = -\frac{1}{8\pi} \int \boldsymbol{E} \operatorname{grad} \varphi \, \mathrm{d} V = -\frac{1}{8\pi} \int \operatorname{div}(\boldsymbol{E}\varphi)\, \mathrm{d} V + \frac{1}{8\pi} \int \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{E} \, \mathrm{d} V.$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist nach dem GAUSSschen Satz gleich dem Integral von $\boldsymbol{E}\varphi$ über die das Integrationsgebiet begrenzende Oberfläche. Es verschwindet, da sich die Volumenintegration über den ganzen Raum erstreckt und das Feld im Unendlichen gegen Null geht. Setzen wir in das zweite Integral $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\varrho$ ein, so ergibt sich der folgende Ausdruck für die Energie des Ladungssystems:

$$U = \frac{1}{2} \int \varrho\, \varphi \, \mathrm{d} V. \tag{60,1}$$

Für ein System von Punktladungen e_a kann man die Integration durch eine Summierung über die Ladungen ersetzen:

$$U = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi_a ; \tag{60,2}$$

hierin ist φ_a das Potential, das von allen Ladungen an der Stelle hervorgerufen wird, wo sich die Ladung e_a befindet.

Entsprechend (59,8) sind die Potentiale

$$\varphi_a = \sum_b \frac{e_b}{R_{ab}},$$

wo R_{ab} die Entfernung zwischen den Ladungen e_a und e_b bedeutet. Für Systeme punktförmiger Ladungen enthält dieser Ausdruck ein unendliches Glied, das vom Potential des Eigenfeldes der Ladung e_a herrührt (das Summenglied mit $b = a$, für das $R_{aa} = 0$ ist). Entsprechend tritt in dem Ausdruck für die Energie (60,2) eine unendliche Konstante auf, die von der gegenseitigen Lage der Ladungen unabhängig ist. Dieser Teil der Energie — die potentielle „Eigen"-Energie der Ladungen — ist physikalisch sinnlos (s. weiter unten) und muß gestrichen werden. Danach bleibt nur die Wechselwirkungsenergie der Ladungen übrig, die von deren Lage abhängig ist. Sie ist gleich

$$U' = \frac{1}{2} \sum e_a \varphi'_a , \tag{60,3}$$

wo

$$\varphi'_a = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}} \tag{60,4}$$

das von allen Ladungen außer e_a erzeugte Potential am Punkte der Ladung e_a ist. Wir können es auch

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}} \tag{60,5}$$

schreiben. Insbesondere ist die Wechselwirkungsenergie zweier Ladungen

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}. \tag{60,6}$$

Wir wenden uns nun wieder der vorher erwähnten unendlichen Eigenenergie der mit einer Elementarladung versehenen Teilchen zu. Sie war dadurch entstanden, daß wir die Teilchen als punktförmig betrachtet haben. Diese Betrachtungsweise ist in der klassischen (nicht quantentheoretischen) relativistischen Theorie schon infolge der grundlegenden Prinzipien der Relativitätstheorie unvermeidlich.

Wenn man in der klassischen Theorie von Elementarteilchen spricht, so meint man Teilchen, deren mechanischer Zustand vollkommen durch die Vorgabe aller ihrer Koordinaten und Geschwindigkeiten beschrieben wird. Wenn ein solches Teilchen ausgedehnt wäre, müßte es in jedem Falle als absolut fester Körper betrachtet werden (d. h. als nicht deformierbarer Körper), da mit dem Begriff der Deformation die Möglichkeit zur Verschiebung einzelner

Körperteile verbunden ist. In der relativistischen Mechanik ist aber die Existenz absolut fester Körper generell unmöglich, was aus den folgenden Überlegungen hervorgeht.

Möge sich der feste Körper durch eine äußere Einwirkung auf irgendeinen seiner Punkte in Bewegung setzen. Wenn der Körper absolut fest wäre, müßten sich alle seine Punkte gleichzeitig mit dem Punkt zu bewegen beginnen, der der Einwirkung ausgesetzt war; im entgegengesetzten Falle wäre der Körper deformierbar. Auf Grund der Existenz einer Grenzgeschwindigkeit für die Ausbreitung der Wechselwirkung wird die Einwirkung vom Ausgangspunkt auf die übrigen mit endlicher Geschwindigkeit übertragen, und daher können sich nicht alle Punkte gleichzeitig zu bewegen beginnen.

Das Elektron müßte somit gemäß der Elektrodynamik eine unendliche „Eigen"-Energie und folglich auch eine unendliche Masse besitzen. Die physikalische Sinnlosigkeit dieses Ergebnisses zeigt, daß die Elektrodynamik, die eine logisch geschlossene physikalische Theorie darstellt, beim Übergang zu hinreichend kleinen Entfernungen widerspruchsvoll wird. Von welcher Größenordnung sind nun diese Entfernungen? Es sollte die elektromagnetische Selbstenergie des Elektrons bei diesen Abständen von der Größenordnung der Ruhmasse $m\,c^2$ sein. Nehmen wir für das Elektron einen Radius r_e an, so ist seine potentielle Energie e^2/r_e und aus der Forderung $e^2/r_e \sim m\,c^2$ finden wir

$$r_e \sim \frac{e^2}{m\,c^2}\,. \tag{60,7}$$

Dieser sogenannte „Elektronenradius" r_e bestimmt diejenigen Grenzen der Anwendbarkeit der Elektrodynamik auf das Elektron, die schon aus ihren eigenen Grundprinzipien folgen. Man muß jedoch im Auge behalten, daß die wirklichen Anwendungsgrenzen der hier dargelegten klassischen Elektrodynamik infolge der Quantenerscheinungen viel enger gezogen sind.[1])

§ 61. Das Feld einer gleichförmig bewegten Ladung

Wir suchen das Feld, das von einer mit der Geschwindigkeit V gleichförmig bewegten Ladung e erzeugt wird. Das Bezugssystem K sei unbewegt. Das sich mit der Ladung bewegende System werde K' genannt, die Ladung ruhe dabei im Ursprung von K'. K' (bzw. e) bewege sich in bezug auf K (mit der Geschwindigkeit V) längs der x-Achse, die Achsen y und z seien parallel zu y' und z'. Zum Zeitpunkt $t = 0$ mögen die beiden Systeme zusammenfallen. Die im System K bestimmten Koordinaten der Ladung sind dann $x = V\,t$, $y = z = 0$. Im System K' besteht ein elektrostatisches Feld

$$\boldsymbol{E}' = \frac{e\,\boldsymbol{R}'}{R'^3}\,, \tag{61,1}$$

das magnetische Feld fehlt.

[1]) Quanteneffekte werden bei Entfernungen der Größenordnung $h/m\,c$ wesentlich (h ist die Plancksche Konstante).

Der Übergang zum System K wird mit den Formeln (50,5) hergestellt, die folgende Gestalt annehmen:

$$E_x = \frac{e\,x'}{R'^3}, \quad E_y = \frac{e\,y'}{R'^3\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{e\,z'}{R'^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{61,2}$$

Wir müssen jetzt R', x', y', z' durch die Koordinaten x, y, z im System K ausdrücken.

Aus den Gleichungen der Lorentz-Transformation

$$x' = \frac{x - V\,t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

folgt

$$R'^2 = \frac{R^{*2}}{1-\frac{V^2}{c^2}}, \tag{61,3}$$

mit

$$R^{*2} = (x - V\,t)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\,. \tag{61,4}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (61,2) ein, so finden wir

$$\boldsymbol{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)\frac{e\,\boldsymbol{R}}{R^{*3}}, \tag{61,5}$$

wobei $\boldsymbol{R}$ der Radiusvektor von der Ladung e zum Aufpunkt x, y, z ist (seine Komponenten sind $x - V\,t$, y, z).

Diesen Ausdruck für $\boldsymbol{E}$ kann man umschreiben, indem man den Winkel θ zwischen der Bewegungsrichtung und der Richtung von $\boldsymbol{R}$ einführt. Offensichtlich ist $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2\theta$, und wir erhalten daher für R^{*2}:

$$R^{*2} = R^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right).$$

Für $\boldsymbol{E}$ folgt also

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\,\boldsymbol{R}}{R^3}\,\frac{1-\frac{V^2}{c}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}. \tag{61,6}$$

Bei festen Entfernungen R von der Ladung wächst der Betrag der Feldstärke E, wenn θ von 0 bis $\pi/2$ zunimmt (bzw. von π auf $\pi/2$ abnimmt). Seinen kleinsten Wert hat das Feld in den Richtungen parallel zur Bewegung ($\theta = 0, \pi$); er beträgt

$$E_{\parallel} = \frac{e}{R^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Der Maximalwert wird senkrecht zur Bewegungsrichtung erreicht ($\theta = \pi/2$):

$$E_\perp = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Bei einer Vergrößerung der Geschwindigkeit wird $E_{||}$ kleiner und $E_\perp$ größer. Wir können dies anschaulich so ausdrücken, daß das Feld einer bewegten Ladung in der Bewegungsrichtung „abgeplattet" ist. Für nahe bei der Lichtgeschwindigkeit liegende V ist der Nenner in (61,6) in einem kleinen Winkelintervall um $\theta = \pi/2$ sehr klein. Die Größe dieses Intervalls ist von der Ordnung

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Das elektrische Feld einer schnell bewegten Ladung ist also nur in einem engen Winkelbereich in der Nähe der Äquatorialebene von Null verschieden. Der Umfang dieses Bereichs fällt mit wachsendem V wie $\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

Das Magnetfeld im System K ist nach (50,7)

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c} [\boldsymbol{V} \boldsymbol{E}]. \tag{61,7}$$

Für kleine Geschwindigkeiten $V \ll c$ ist das elektrische Feld näherungsweise durch das gewöhnliche Coulombsche Gesetz $\boldsymbol{E} = e\, \boldsymbol{R}/R^3$ gegeben und das Magnetfeld daher

$$\boldsymbol{H} = \frac{e}{c} \frac{[\boldsymbol{V} \boldsymbol{R}]}{R^3}. \tag{61,8}$$

Aufgabe

Man bestimme im System K die Wechselwirkungskraft zwischen zwei Ladungen, die sich mit den gleichen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{V}$ bewegen.

Lösung. Die gesuchte Kraft $\boldsymbol{F}$ berechnen wir als die auf die eine Ladung (e_1) wirkende Kraft in dem Feld, das von der anderen Ladung (e_2) erzeugt wird. Wegen (61,7) haben wir

$$\boldsymbol{F} = e_1 \boldsymbol{E} + \frac{e_1}{c} [\boldsymbol{V} \boldsymbol{H}_2] = e_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \boldsymbol{E}_2 + \frac{e_1}{c^2} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V} \boldsymbol{E}_2).$$

Setzen wir hier $\boldsymbol{E}_2$ aus (61,6) ein, so erhält man für die Kraftkomponenten in Bewegungsrichtung (F_x) und senkrecht dazu (F_y):

$$F_x = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \cos\theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}}, \qquad F_y = \frac{e_1 e_2}{R^2} \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^2 \sin\theta}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2\theta\right)^{3/2}}.$$

$\boldsymbol{R}$ ist der Radiusvektor, der von e_1 nach e_1 weist, θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{V}$.

§ 62. Das Dipolmoment

Wir untersuchen das Feld eines Systems von Ladungen in Entfernungen, die groß im Vergleich zum Durchmesser des Systems sind.

Das Koordinatensystem wählen wir so, daß der Ursprung innerhalb des Systems liegt. Der Radiusvektor der einzelnen Ladungen sei $\boldsymbol{r}_a$. Das von allen Ladungen im Punkte mit dem Radiusvektor $\boldsymbol{R}_0$ (dem Aufpunkt) hervorgerufene Feld ist

$$\varphi = \sum \frac{e_a}{|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_a|} \tag{62,1}$$

(die Summierung erstreckt sich über alle Ladungen). $\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_a$ ist der Radiusvektor von der Ladung e_a zum Aufpunkt.

Dieser Ausdruck ist nun für große $\boldsymbol{R}_0$ ($\boldsymbol{R}_0 \gg \boldsymbol{r}_a$) zu untersuchen. Wir entwickeln ihn dazu in eine Reihe nach Potenzen von $\boldsymbol{r}_a/R_0$ unter Benutzung der Formel

$$f(\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}) \approx f(\boldsymbol{R}_0) - \boldsymbol{r} \operatorname{grad} f(\boldsymbol{R}_0)$$

(die Operation grad bezieht sich auf die Aufpunktkoordinaten). Bis auf Glieder höherer Ordnung haben wir dann

$$\varphi = \frac{\sum e_a}{R_0} - \sum e_a \boldsymbol{r}_a \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{R_0}. \tag{62,2}$$

Die Summe

$$\boldsymbol{d} = \sum e_a \boldsymbol{r}_a \tag{62,3}$$

wird als *Dipolmoment* des Systems bezeichnet.

Wesentlich ist die Tatsache, daß das Dipolmoment von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig ist, wenn die Summe $\sum e_a$ aller Ladungen verschwindet. Es seien $\boldsymbol{r}_a$ und $\boldsymbol{r}_a'$ die Radiusvektoren ein und derselben Ladung in zwei verschiedenen Koordinatensystemen, die durch

$$\boldsymbol{r}_a' = \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{a}$$

verbunden sind ($\boldsymbol{a}$ ist ein beliebiger konstanter Vektor). Ist daher $\sum e_a = 0$, so ergibt sich für das Dipolmoment in beiden Systemen derselbe Wert

$$\boldsymbol{d}' = \sum e_a \boldsymbol{r}_a' = \sum e_a \boldsymbol{r}_a + \boldsymbol{a} \sum e_a = \boldsymbol{d}\,.$$

Speziell für ein System aus zwei Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens ($\pm e$) beträgt das Dipolmoment $\boldsymbol{d} = e\,\boldsymbol{r}$, wobei $\boldsymbol{r}$ der Radiusvektor von der Ladung $-e$ zur Ladung $+e$ ist.

Bei verschwindender Gesamtladung ist das vom System erzeugte Potential in großen Entfernungen

$$\varphi = -\boldsymbol{d} \nabla \frac{1}{R_0} = \frac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{R}_0}{R_0^3}. \tag{62,4}$$

Die Feldstärke ergibt sich zu

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \frac{\boldsymbol{d}\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \operatorname{grad} (\boldsymbol{d}\boldsymbol{R}_0) - (\boldsymbol{d}\boldsymbol{R}_0) \operatorname{grad} \frac{1}{R_0^3}$$

oder schließlich

$$\boldsymbol{E} = \frac{3(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{d})\,\boldsymbol{n} - \boldsymbol{d}}{R_0^3} \tag{62,5}$$

mit $\boldsymbol{n}$ als Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{R}_0$.

Das Potential eines Feldes, das von einem System mit verschwindender Gesamtladung erzeugt wird, ist also in großen Entfernungen dem Quadrate und die Feldstärke der dritten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional. Es besitzt Axialsymmetrie um die Achse $\boldsymbol{d}$, die im weiteren die z-Achse des Koordinatensystems darstellt. In einer Ebene, die die z-Richtung enthält, sind die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{E}$

$$E_z = d\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{R_0^3}, \qquad E_x = d\,\frac{3\sin\theta\cos\theta}{R_0^3}. \tag{62,6}$$

Die radialen und tangentialen Komponenten in dieser Ebene sind

$$E_R = d\,\frac{2\cos\theta}{R_0^3}, \qquad E_\theta = -\,d\,\frac{\sin\theta}{R_0^3}. \tag{62,7}$$

§ 63. Das Quadrupolmoment

In der Entwicklung des Potentials nach Potenzen von $1/R_0$

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \cdots \tag{63,1}$$

ist das allgemeine Glied $\varphi^{(n)}$ proportional zu $1/R_0^{n+1}$. Wie wir sahen, wird der erste Term $\varphi^{(0)}$ durch die Summe der Ladungen bestimmt, der zweite $\varphi^{(1)}$ (das sogenannte Dipolpotential) durch das Dipolmoment.

Der dritte Term der Entwicklung ist

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e\, x_i\, x_k \frac{\partial^2}{\partial X_i\,\partial X_k}\frac{1}{R_0}. \tag{63,2}$$

Die Summation erstreckt sich wieder über alle Ladungen; wir lassen dabei an e den Index, der die einzelne Ladung kennzeichnet, fort. x_i sind die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{r}$, X_i die des Vektors $\boldsymbol{R}_0$.
Dieser Beitrag zum Potential wird als Quadrupolpotential bezeichnet. Sind die Gesamtladung und das Dipolmoment eines Systems Null, so beginnt die Entwicklung mit diesem Glied $\varphi^{(2)}$.

In den Ausdruck (63,2) gehen die 6 Größen $\sum e\, x_i\, x_k$ ein. Man sieht jedoch leicht, daß das Feld in Wirklichkeit nicht von 6, sondern nur von 5 unabhängigen Größen abhängt. Dies ergibt sich daraus, daß die Funktion $1/R_0$ die LAPLACE-Gleichung erfüllen muß:

$$\Delta\frac{1}{R_0} \equiv \delta_{ik}\frac{\partial^2}{\partial X_i\,\partial X_k}\frac{1}{R_0} = 0\,.$$

Wir können $\varphi^{(2)}$ in der Form

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum e\left(x_i\, x_k - \frac{1}{3} r^2\, \delta_{ik}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_i\,\partial X_k}\frac{1}{R_0}$$

schreiben.

Der Tensor

$$D_{ik} = \sum e\,(3\, x_i x_k - r^2\, \delta_{ik}) \tag{63,3}$$

heißt *Quadrupolmoment* des Systems. Aus der Definition von D_{ik} folgt, daß die Summe seiner Diagonalkomponenten Null ergibt:

$$D_{ii} = 0\,. \tag{63,4}$$

Der symmetrische Tensor D_{ik} hat daher nur 5 unabhängige Komponenten. Mit seiner Hilfe können wir

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{ik}}{6} \frac{\partial^2}{\partial X_i\, \partial X_k} \frac{1}{R_0} \tag{63,5}$$

schreiben oder, wenn wir die Ableitung ausführen,

$$\frac{\partial^2}{\partial X_i\, \partial X_k} \frac{1}{R_0} = \frac{3\, X_i\, X_k}{R_0^5} - \frac{\delta_{ik}}{R_0^3}$$

und schließlich, wenn wir berücksichtigen, daß wegen (41,4) $\delta_{ik}\, D_{ik} = D_{ii} = 0$ ist, auch

$$\varphi^{(2)} = \frac{D_{ik}\, n_i\, n_k}{2\, R_0^3}\,. \tag{63,6}$$

Wie jeder symmetrische dreidimensionale Tensor kann D_{ik} auf Hauptachsen transformiert werden. Infolge der Bedingung (63,4) sind dann im allgemeinen Fall nur zwei der drei Hauptwerte unabhängig. Sind die Ladungen symmetrisch in bezug auf irgendeine Achse (z-Achse) verteilt[1]), so ist sie eine Hauptachse des Tensors. Die Lage der beiden anderen Achsen in der xy-Ebene ist beliebig. Alle drei Hauptwerte hängen durch

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2} D_{zz} \tag{63,7}$$

miteinander zusammen. Bezeichnen wir die Komponente D_{zz} mit D (D wird in diesem Fall einfach Quadrupolmoment genannt), so erhalten wir das Potential in der Gestalt

$$\varphi^{(2)} = \frac{D}{4\, R_0^3} (3 \cos^2 \theta - 1)\,, \tag{63,8}$$

wo θ der Winkel zwischen R_0 und der z-Achse ist. Man weist auf ähnliche Weise wie im letzten Paragraphen für das Dipolmoment nach, daß das Quadrupolmoment des Systems von der Wahl des Koordinatenursprungs unabhängig ist, wenn sowohl die Gesamtladung als auch das Dipolmoment des Systems verschwinden.

Die weiteren Glieder der Entwicklung (63,1) lassen sich nun in analoger Weise wie (63,2) bilden. Das l-te Glied wird durch einen Tensor l-ten Ranges, den sogenannten Tensor des 2^l-Polmomentes, bestimmt, der in allen Indizes symmetrisch ist und bei Kontraktion über ein beliebiges Indexpaar verschwindet. Es läßt sich zeigen, daß ein solcher Tensor $2\,l + 1$ unabhängige Komponenten hat.

[1]) Wir betrachten eine Symmetrieachse beliebiger Ordnung größer als 2.

Aufgabe

Man bestimme das Quadrupolmoment eines Ellipsoides mit homogener Ladungsdichte bezüglich seines Zentrums.

Lösung. Wir ersetzen die Summation in (63,3) durch die Integration über das Volumen des Ellipsoides und haben

$$D_{xx} = \varrho \iiint (2\,x^2 - y^2 - z^2)\,dx\,dy\,dz$$

usw. Die Integration über das Volumen des Ellipsoids kann durch die Integration über ein Kugelvolumen ersetzt werden, wie dies in der Aufgabe 2e des § 25 geschah. Als Ergebnis finden wir:

$$D_{xx} = \frac{e}{5}(2\,a^2 - b^2 - c^2)\,, \qquad D_{yy} = \frac{e}{5}(2\,b^2 - a^2 - c^2)\,,$$

$$D_{zz} = \frac{e}{5}(2\,c^2 - a^2 - b^2)\,,$$

wo $e = \frac{4\,\pi}{3} \cdot a\,b\,c\,\varrho$ die Gesamtladung des Ellipsoides ist.

§ 64. Ein System von Ladungen in einem äußeren Feld

Ein System von Ladungen befinde sich in einem äußeren Feld mit dem Potential $\varphi(\boldsymbol{r})$. Die potentielle Energie jeder Ladung ist dann $e_a\,\varphi(\boldsymbol{r}_a)$ und die gesamte potentielle Energie des Systems beträgt

$$U = \sum_a e_a\,\varphi(\boldsymbol{r}_a)\,. \tag{64,1}$$

Wir wählen wieder den Ursprung des Koordinatensystems irgendwo innerhalb der Ladungen. $\boldsymbol{r}_a$ ist in diesen Koordinaten der Radiusvektor der Ladung e_a.

Das äußere Feld ändere sich, wie wir annehmen wollen, nur wenig auf einer Strecke von der Größe des ganzen Systems der Ladungen, es sei also quasihomogen bezüglich dieses Systems. Wir können dann die Energie U in eine Potenzreihe nach $\boldsymbol{r}_a$ entwickeln. In dieser Entwicklung

$$U = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \cdots \tag{64,2}$$

ist das erste Glied

$$U = \varphi_0 \sum_a e_a \tag{64,3}$$

und φ_0 das Potential am Ursprung. In erster Näherung ist die Energie also die eines Systems, in dem sich alle Ladungen an einem Punkte (im Koordinatenanfangspunkt) befinden.

Das zweite Glied der Entwicklung lautet

$$U^{(1)} = (\operatorname{grad}\varphi)_0 \cdot \sum e_a\,\boldsymbol{r}_a\,.$$

Mit dem Dipolmoment $\boldsymbol{d}$ des Systems und $\boldsymbol{E}_0$ als Feldstärke am Koordinatenursprung gilt

$$U^{(1)} = -\,\boldsymbol{d}\boldsymbol{E}_0\,. \tag{64,4}$$

Die Gesamtkraft, die auf das System in einem quasihomogenen äußeren Feld wirkt, beträgt in der betrachteten Näherung

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E}_0 \sum e_a + (\operatorname{grad} \boldsymbol{dE})_0 .$$

Bei verschwindender Gesamtladung verschwindet auch das erste Glied und es bleibt

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{d}\,\nabla)\,\boldsymbol{E}\,, \tag{64,5}$$

d. h., die Kraft hängt von der Ableitung der Feldstärke (am Koordinatenursprung) ab. Das Drehmoment aller auf die Ladungen wirkenden Kräfte ist in erster Näherung

$$\boldsymbol{K} = \sum [\boldsymbol{r}_a \cdot e_a \boldsymbol{E}_0] = [\boldsymbol{dE}_0]\,, \tag{64,6}$$

hängt also von der Feldstärke ab.

Es seien zwei Systeme mit jeweils verschiedenen Gesamtladungen und den Dipolmomenten $\boldsymbol{d}_1$ und $\boldsymbol{d}_2$ gegeben, deren Durchmesser klein im Vergleich zu ihrem Abstand sind. Wir wollen die potentielle Energie U ihrer Wechselwirkung bestimmen. Man hat dazu ein System als im Felde des anderen befindlich anzusehen und erhält

$$U = -\,\boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{E}_1\,,$$

wo $\boldsymbol{E}_1$ die Feldstärke des ersten Systems ist. Für $\boldsymbol{E}_1$ setzen wir den Ausdruck (62,5) ein und finden

$$U = \frac{\boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{d}_2 - 3\,(\boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{n})\,(\boldsymbol{d}_2 \boldsymbol{n})}{R^3}\,, \tag{64,7}$$

$\boldsymbol{n}$ ist der Einheitsvektor in Richtung der Verbindungslinie beider Systeme.

Falls bei einem System die Summe der Ladungen nicht verschwindet (sondern e ist), erhalten wir auf entsprechende Weise

$$U = e\,\frac{\boldsymbol{dn}}{R^2}\,. \tag{64,8}$$

$\boldsymbol{n}$ ist der vom Dipol zur Ladung gerichtete Einheitsvektor.

Das nächste Glied der Entwicklung (64,1) ist

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum e\, x_i\, x_k\, \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i\, \partial x_k}\,.$$

(Wie schon im § 63 lassen wir auch hier die Indizes fort, die die einzelnen Ladungen kennzeichnen.) Die zweiten Ableitungen des Potentials sind am Koordinatenursprung zu nehmen. Nun erfüllt φ die LAPLACE-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \delta_{ik}\, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0\,.$$

Wir können daher

$$U^{(2)} = \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i\, \partial x_k} \sum e \left(x_i\, x_k - \frac{1}{3}\, \delta_{ik}\, r^2 \right).$$

oder schließlich

$$U^{(2)} = \frac{D_{ik}}{6} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_i \, \partial x_k} . \tag{64,9}$$

schreiben.

§ 65. Das zeitunabhängige Magnetfeld

Wir betrachten ein Magnetfeld, das von Ladungen hervorgerufen wird, die sich zu allen Zeiten in einem endlichen Raumbereich bewegen, wobei ihre Impulse auch immer endlich bleiben sollen. Eine solche Bewegung ist stationär, und wir interessieren uns für den zeitlichen Mittelwert des Magnetfeldes. Dieses mittlere Feld $\boldsymbol{H}$ hängt dann nur noch von den Ortskoordinaten, nicht mehr von der Zeit ab und ist daher statisch.

Um die Gleichungen zu finden, denen das gemittelte Magnetfeld genügen muß, mitteln wir die MAXWELLschen Gleichungen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 , \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}$$

über die Zeit. Die erste ergibt einfach

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{H}} = 0 . \tag{65,1}$$

In der zweiten Gleichung verschwindet der Mittelwert der Ableitung $\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$, wie der jeder Zeitableitung einer Größe, die sich nur innerhalb eines beschränkten Intervalles ändern kann.[1]) Die zweite MAXWELLsche Gleichung hat dann die Gestalt

$$\operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{H}} = \frac{4\pi}{c} \overline{\boldsymbol{j}} . \tag{65,2}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen das zeitunabhängige Magnetfeld $\overline{\boldsymbol{H}}$.

Das mittlere Vektorpotential führen wir durch

$$\operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{H}}$$

ein. Setzen wir es in (65,2) ein, so erhalten wir

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{A}} - \Delta \overline{\boldsymbol{A}} = \frac{4\pi}{c} \overline{\boldsymbol{j}} .$$

[1]) Es sei f eine derartige Größe. Dann ist der Mittelwert der Ableitung $\mathrm{df}/\mathrm{d}t$ über ein bestimmtes Zeitintervall T

$$\overline{\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathrm{df}}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{f}(T) - \mathrm{f}(0)}{T} .$$

Sofern sich $\mathrm{f}(T)$ nur innerhalb endlicher Grenzen verändert, strebt dieser Mittelwert bei unbeschränkter Größe T tatsächlich gegen Null.

Wie wir wissen, ist das Vektorpotential nicht eindeutig bestimmt und kann daher einer Bedingung unterworfen werden. Wir wählen es so, daß

$$\operatorname{div} \overline{\boldsymbol{A}} = 0 \tag{65,3}$$

gilt. Die Gleichung für das Vektorpotential eines statischen Magnetfeldes gewinnt dann die Gestalt

$$\Delta \overline{\boldsymbol{A}} = -\frac{4\pi}{c}\overline{\boldsymbol{j}}\,. \tag{65,4}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist leicht zu finden, da (65,4) der POISSON-Gleichung (59,4) für das skalare Potential des elektromagnetischen Feldes völlig entspricht. Anstelle der Ladungsdichte ϱ steht hier die Stromdichte $\overline{\boldsymbol{j}}/c$. In Analogie zur Lösung (59,9) der POISSON-Gleichung können wir sofort

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{c}\int \frac{\overline{\boldsymbol{j}}}{R}\,\mathrm{d}V \tag{65,5}$$

schreiben. R ist die Entfernung vom Aufpunkt zum Volumenelement $\mathrm{d}V$.

In (65,5) können wir vom Integral zur Summe dadurch übergehen, daß wir $\boldsymbol{j}$ durch $\varrho\,\boldsymbol{v}$ ersetzen und alle Ladungen als punktförmig ansehen. Dabei hat man zu beachten, daß R in dem Integral (65,5) lediglich eine Integrationsvariable ist und daher der Mittelung nicht unterliegt. Schreiben wir dagegen statt $\int \frac{\overline{\boldsymbol{j}}}{R}\,\mathrm{d}V$ die Summe $\sum \frac{e_a \boldsymbol{v}_a}{R_a}$, so ist R_a hier der Radiusvektor der einzelnen Ladungen, der sich bei ihrer Bewegung ändert. Wir müssen also

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{c}\sum \overline{\frac{e_a \boldsymbol{v}_a}{R_a}} \tag{65,6}$$

setzen, wo über den gesamten unter dem Querstrich stehenden Ausdruck zu mitteln ist.

Bei bekanntem $\overline{\boldsymbol{A}}$ ergibt sich für die Feldstärke

$$\overline{\boldsymbol{H}} = \operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{A}} = \operatorname{rot} \frac{1}{c}\int \frac{\overline{\boldsymbol{j}}}{R}\,\mathrm{d}V\,.$$

Die Operation rot bezieht sich auf die Koordinaten des Aufpunktes. Wir können also rot unter das Integral ziehen; $\overline{\boldsymbol{j}}$ ist gegenüber dieser Ableitung eine Konstante. Wenden wir die Formel

$$\operatorname{rot} f\boldsymbol{a} = f \operatorname{rot} \boldsymbol{a} + [\operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{a}]\,,$$

die für einen beliebigen Skalar f und einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{a}$ gilt, auf das Produkt $\overline{\boldsymbol{j}} \cdot \frac{1}{R}$ an, so finden wir

$$\operatorname{rot} \frac{\overline{\boldsymbol{j}}}{R} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{R} \cdot \overline{\boldsymbol{j}}\right] = \frac{\overline{\boldsymbol{j}}\,\boldsymbol{R}}{R^3}$$

und damit

$$\overline{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{c}\int \frac{[\overline{\boldsymbol{j}}\,\boldsymbol{R}]}{R^3}\,\mathrm{d}V \tag{65,7}$$

(der Radiusvektor $\boldsymbol{R}$ ist vom Volumenelement dV aus zum Aufpunkt gerichtet). Dies ist das sogenannte BIOT-SAVART*sche Gesetz.*

§ 66. Das magnetische Moment

Hier untersuchen wir das mittlere Magnetfeld, das von einem System stationär sich bewegender Ladungen erzeugt wird, in großen Entfernungen vom System.

Der Anfangspunkt des Koordinatensystems, das wir benutzen, liege wieder wie in § 62 innerhalb des Systems der Ladungen; ebenso sei $\boldsymbol{r}_a$ wieder der Radiusvektor der einzelnen Ladungen und $\boldsymbol{R}_0$ der Radiusvektor des Aufpunktes, in dem wir das Feld bestimmen wollen. Dann ist $\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_a$ der Radiusvektor von der Ladung e_a zum Aufpunkt. Nach (65,6) gilt für das Vektorpotential

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{c}\sum \overline{\frac{e_a\,\boldsymbol{v}_a}{|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_a|}}\,. \tag{66,1}$$

Ebenso wie in § 62 entwickeln wir diesen Ausdruck nach Potenzen von $\boldsymbol{r}_a$. Bis auf Glieder erster Ordnung haben wir (der Index a ist kürzehalber fortgelassen)

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{c\,R_0}\sum e\,\overline{\boldsymbol{v}} - \frac{1}{c}\sum \overline{e\,\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}\,\nabla\,\frac{1}{R_0}\right)}\,.$$

Im ersten Glied läßt sich

$$\sum e\,\overline{\boldsymbol{v}} = \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum e\,\boldsymbol{r}}$$

schreiben. Der Mittelwert der zeitlichen Ableitung der sich innerhalb endlicher Grenzen ändernden Größe $\sum e\,\boldsymbol{r}$ verschwindet. Für $\overline{\boldsymbol{A}}$ bleibt der Ausdruck

$$\overline{\boldsymbol{A}} = -\frac{1}{c}\sum \overline{e\,\boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{r}\,\nabla\,\frac{1}{R_0}\right)} = \frac{1}{c\,R_0^3}\sum \overline{e\,\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{R}_0)}$$

übrig, den wir wie folgt umformen. Mit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ ergibt sich (da $\boldsymbol{R}_0$ ein konstanter Vektor ist)

$$\sum e\,(\boldsymbol{R}_0\,\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum e\,\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{R}_0) + \frac{1}{2}\sum e\,[\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{R}_0) - \boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{R}_0)]\,.$$

Der Mittelwert des ersten Gliedes verschwindet (als Zeitableitung) beim Einsetzen in den Ausdruck für $\boldsymbol{A}$, und wir erhalten

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2\,c\,R_0^3}\sum e\,[\overline{\boldsymbol{v}\,(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{R}_0)} - \overline{\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{R}_0)}]\,.$$

Der Vektor

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2\,c}\sum e\,[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{v}] \tag{66,2}$$

wird *magnetisches Moment* des Systems genannt. Mit ihm folgt

$$\bar{\boldsymbol{A}} = \frac{[\bar{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla \frac{1}{R_0} \cdot \bar{\boldsymbol{m}}\right]. \tag{66,3}$$

Aus dem Vektorpotential läßt sich leicht die magnetische Feldstärke ermitteln. Die Formel

$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}] = (\boldsymbol{b}\,\nabla)\,\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\,\nabla)\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}$$

ergibt

$$\bar{\boldsymbol{H}} = \operatorname{rot}\left[\bar{\boldsymbol{m}}\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3}\right] = \bar{\boldsymbol{m}}\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} - (\bar{\boldsymbol{m}}\,\nabla)\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3}.$$

Weiter ist

$$\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} = \boldsymbol{R}_0 \operatorname{grad}\frac{1}{R_0^3} + \frac{1}{R_0^3}\operatorname{div}\boldsymbol{R}_0 = 0$$

und

$$(\bar{\boldsymbol{m}}\,\nabla)\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} = \frac{1}{R_0^3}(\bar{\boldsymbol{m}}\,\nabla)\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}_0\left(\bar{\boldsymbol{m}}\,\nabla\frac{1}{R_0^3}\right) = \frac{\bar{\boldsymbol{m}}}{R_0^3} - \frac{3\boldsymbol{R}_0(\bar{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{R}_0)}{R_0^5},$$

so daß sich schließlich

$$\bar{\boldsymbol{H}} = \frac{3\boldsymbol{n}(\bar{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{n}) - \bar{\boldsymbol{m}}}{R_0^3} \tag{66,4}$$

ergibt, wo $\boldsymbol{n}$ wieder der Einheitsvektor in der Richtung $\boldsymbol{R}_0$ ist. Man erkennt, daß sich das Magnetfeld durch das magnetische Moment ebenso ausdrückt, wie das elektrische Feld durch das Dipolmoment (siehe (62,5)).

Haben alle Ladungen des Systems dasselbe Verhältnis Ladung zu Masse, so können wir

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\sum e\,[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{v}] = \frac{e}{2mc}\sum m\,[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{v}]$$

schreiben. Ist weiterhin die Geschwindigkeit aller Ladungen $v \ll c$, so stellt $m\boldsymbol{v}$ den Impuls $\boldsymbol{p}$ dar, und wir erhalten

$$\boldsymbol{m} = \frac{e}{2mc}\sum[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}] = \frac{e}{2mc}\boldsymbol{M}, \tag{66,5}$$

wo $\boldsymbol{M} = \sum[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{p}]$ der mechanische Drehimpuls des Systems ist. In diesem Falle ist das Verhältnis von magnetischem zu mechanischem Moment konstant und gleich $e/2mc$.

Aufgabe

Man bestimme das Verhältnis von magnetischem zu mechanischem Moment für ein aus zwei Ladungen bestehendes System (die Geschwindigkeiten seien klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit).

Lösung. Wir legen den Koordinatenursprung in den Schwerpunkt der beiden Teilchen und haben dann $m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 = 0$ und $\boldsymbol{p}_1 = -\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}$, wo $\boldsymbol{p}$ der Impuls der Relativbewegung ist. Mit diesen Beziehungen finden wir

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{M}.$$

§ 67. Die Larmor-Präzession

Ein System von Ladungen befinde sich in einem äußeren homogenen magnetostatischen Feld.

Das Zeitmittel der auf das System wirkenden Kraft

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \Sigma \frac{e}{c} \overline{[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{H}]} = \overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Sigma \frac{e}{c} [\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{H}]}$$

verschwindet, da es ein Mittelwert über die zeitliche Ableitung einer beschränkt veränderlichen Größe ist. Dagegen ist das Mittel über das Drehmoment der Kraft

$$\overline{\boldsymbol{K}} = \Sigma \frac{e}{c} \overline{[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{H}]]}$$

von Null verschieden. Wir können es durch das magnetische Moment des Systems ausdrücken und schreiben dazu

$$\boldsymbol{K} = \Sigma \frac{e}{c} \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{H}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{r})\} = \Sigma \frac{e}{c} \left\{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{H}) - \frac{1}{2} \boldsymbol{H} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{r}^2\right\}.$$

Bei der Mittlung ergibt das zweite Glied Null, so daß

$$\overline{\boldsymbol{K}} = \Sigma \frac{e}{c} \overline{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{H})} = \frac{1}{2c} \Sigma\, e\, \{\overline{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{H})} - \overline{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{H})}\}$$

folgt (die letzte Umformung entspricht der bei der Herleitung von (66,3) durchgeführten) oder schließlich

$$\overline{\boldsymbol{K}} = [\overline{\boldsymbol{m}}\,\boldsymbol{H}]\,. \tag{67,1}$$

Man beachte die Analogie mit der entsprechenden Formel (64,6) für den elektrischen Fall.

Wir betrachten nun ein System von gleichartig geladenen Teilchen mit beschränkter Bewegung und mit Geschwindigkeiten $v \ll c$ in einem zentralsymmetrischen Feld erzeugt von einem unbewegten Teilchen (sagen wir, ein System von Elektronen im Atom im Feld des Kerns). Nehmen wir an, daß sich dieses System in einem schwachen homogenen Magnetfeld befinde.

Bei Abwesenheit eines äußeren Feldes würde das gesamte mechanische Moment $\boldsymbol{M}$ des Systems konstant bleiben. Das schwache Magnetfeld führt zu einer langsamen zeitlichen Änderung von $\boldsymbol{M}$. Betrachten wir den Charakter dieser Änderung. Um dabei den Einfluß der schnellveränderlichen Grundbewegung der Ladungen im System auszuschließen, mitteln wir $\boldsymbol{M}$ über die Periodendauer dieser Bewegung.

Nach einer bekannten Gleichung der Mechanik (s. (27,3)) ist

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{M}}}{\mathrm{d}t} = \overline{\boldsymbol{K}}\,,$$

wobei $\overline{\boldsymbol{K}}$ das Drehmoment der auf das System wirkenden äußeren Kraft ist (gemittelt über dasselbe Zeitintervall wie $\boldsymbol{M}$). Mit (67,1) und (66,5) erhalten wir:

$$\overline{\boldsymbol{K}} = [\overline{\boldsymbol{m}}\,\boldsymbol{H}] = \frac{e}{2\,m\,c} [\overline{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{H}]\,.$$

Wir können daher schreiben

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{M}}}{\mathrm{d}t} = -[\boldsymbol{\Omega}\,\overline{\boldsymbol{M}}] \tag{67,2}$$

mit

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{e}{2\,m\,c}\boldsymbol{H}\,. \tag{67,3}$$

Die Gleichung (67,2) besagt, daß der Vektor $\overline{\boldsymbol{M}}$ (und mit ihm das magnetische Moment $\overline{\boldsymbol{m}}$) mit der Winkelgeschwindigkeit $-\boldsymbol{\Omega}$ um die Feldrichtung rotiert. Dabei bleiben sein Betrag und sein mit dem Feld gebildeter Winkel ungeändert. Diese Erscheinung heißt Larmor-*Präzession* und die Winkelgeschwindigkeit (67,3) — Larmor-*Frequenz.*

Wir können jetzt genauer formulieren, was wir weiter oben unter einem hinreichend schwachen Feld verstanden haben: die Larmor-Frequenz Ω muß klein sein gegenüber den Frequenzen, die bei der beschränkten Eigenbewegung der Ladungen im System auftreten. Es ist offensichlich, daß es nur unter solchen Bedingungen einen Sinn hat die zeitliche Änderung des Moments zu betrachten, wie dies weiter oben durch Mittelung geschehen ist.

Elektromagnetische Wellen XIII

§ 68. Die Wellengleichung

Das elektromagnetische Feld im Vakuum gehorcht den MAXWELLschen Gleichungen, in denen $\varrho = 0$, $\boldsymbol{j} = 0$ zu setzen ist. Sie lauten dann

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0\,, \tag{68,1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0\,. \tag{68,2}$$

Diese Gleichungen können von Null verschiedene Lösungen besitzen. Das bedeutet, daß es auch elektromagnetische Felder bei Abwesenheit von Ladungen geben kann.

Ein derartiges elektromagnetisches Feld, das im Vakuum ohne Ladungen existiert, wird *elektromagnetische Welle* genannt. Wir wollen hier die Eigenschaften dieser Felder untersuchen.

Zunächst ist zu bemerken, daß ein Feld dieser Art unbedingt veränderlich sein muß. Gilt nämlich $\partial \boldsymbol{H}/\partial t = \partial \boldsymbol{E}/\partial t = 0$, so gehen (68,1) und (68,2) in die Gleichungen (59,1), (59,2) und (65,1), (65,2) für statische Felder über, in denen jedoch jetzt ϱ und $\boldsymbol{j}$ verschwinden. Dann sind aber auch die durch (59,9) und (65,5) gegebenen Lösungen dieser Gleichungen Null.

Wir leiten nun Gleichungen für die Potentiale elektromagnetischer Wellen ab. Wegen der Nichteindeutigkeit der Potentiale kann man ihnen, wie wir wissen, immer eine Zusatzbedingung auferlegen. Wir wählen sie hier so, daß das skalare Potential verschwindet:

$$\varphi = 0\,. \tag{68,3}$$

Dann ist

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\,. \tag{68,4}$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke in die erste Gleichung von (68,2) ein, finden wir

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = -\Delta \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2}\,. \tag{68,5}$$

Obwohl wir bereits eine Bedingung gestellt haben, ist das Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ immer noch nicht eindeutig, denn man kann zu $\boldsymbol{A}$ den Gradienten einer beliebigen zeitunabhängigen Funktion addieren (dabei ändert sich φ nicht). Dies gibt uns die Möglichkeit,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{68,6}$$

als weitere Bedingung zu fordern. Setzen wir nämlich $\boldsymbol{E}$ aus (68,4) in div $\boldsymbol{E} = 0$ ein, so folgt

$$\operatorname{div} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 ,$$

d. h., div $\boldsymbol{A}$ hängt nur von den Ortskoordinaten ab. div $\boldsymbol{A}$ läßt sich daher immer dadurch zum Verschwinden bringen, daß wir zu $\boldsymbol{A}$ den Gradienten einer geeigneten zeitunabhängigen Funktion hinzufügen.

(68,5) erhält dann die Gestalt

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0 . \tag{68,7}$$

Diese Gleichung für das Potential einer elektromagnetischen Welle heißt D'ALEMBERT- oder *Wellengleichung.*

Wenden wir auf (68,7) die Operationen rot und $\partial/\partial t$ an, so stellen wir fest, daß die Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ ebenfalls der Wellengleichung gehorchen.

§ 69. Ebene Wellen

Wir betrachten den Spezialfall elektromagnetischer Wellen, bei dem das Feld nur von einer Ortskoordinate, etwa x (und von der Zeit) abhängt. Solche Wellen werden als *eben* bezeichnet. Die Feldgleichung lautet dann

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 ; \tag{69,1}$$

f ist eine beliebige Komponente von $\boldsymbol{E}$ oder $\boldsymbol{H}$.

Um diese Gleichung zu lösen, schreiben wir sie in der Gestalt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

und führen die neuen Veränderlichen

$$\xi = t - \frac{x}{c} , \qquad \eta = t + \frac{x}{c}$$

ein mit der Umkehrung

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi) , \qquad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi) .$$

Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) , \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

und die Wellengleichung erhält die Gestalt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0 .$$

Die Lösung hat die Gestalt

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta) ,$$

wobei f_1 und f_2 beliebige Funktionen sind.

Die gesuchte Lösung lautet daher

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \tag{69,2}$$

Es sei etwa $f_2 = 0$, so daß sich f auf $f_1\,(t - x/c)$ reduziert. Wir wollen uns die Bedeutung dieser Lösung überlegen. In jeder Ebene $x = \text{const}$ ändert sich das Feld mit der Zeit, und zu jedem Zeitpunkt hängt es von x ab. Es besitzt für alle diejenigen Ortskoordinaten x und Zeitpunkte t denselben Wert, die die Bedingung $t - x/c = \text{const}$ oder

$$x = \text{const} + c\,t$$

erfüllen. Dies bedeutet: Hat das Feld zu irgendeiner Zeit, etwa $t = 0$, an einem beliebigen Raumpunkt x einen bestimmten Wert, so besitzt es nach der Zeit t denselben Wert an einem Punkt, der sich in der Entfernung $c\,t$ vom ursprünglichen Punkt auf der x-Achse befindet. Wir können somit sagen, daß sich die elektromagnetischen Feldwerte längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit c ausbreiten.

$f_1\,(t - x/c)$ ist daher eine ebene Welle, die auf der x-Achse in positiver Richtung entlangläuft. $f_2\,(t + x/c)$ ist dann offensichtlich eine Welle, die sich in der umgekehrten Richtung bewegt.

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt, daß man die Potentiale einer elektromagnetischen Welle immer so wählen kann, daß $\varphi = 0$ und $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ gilt. Wir wollen auch die Potentiale der hier betrachteten ebenen Welle auf diese Weise festlegen. Die Bedingung $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ ergibt

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 ,$$

da alle Größen von y und z unabhängig sind. Nach (69,1) haben wir dann auch $\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0$, d. h. $\frac{\partial A_x}{\partial t} = \text{const}$. Nun ergeben die Ableitungen $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ das elektrische Feld, und wir sehen, daß eine von Null verschiedene Komponente A_x hier die Existenz eines longitudinalen statischen elektrischen Feldes bedeuten würde. Ein derartiges Feld hätte aber keine Beziehung zu einer Welle und wir setzen daher $A_x = 0$.

Das Vektorpotential einer ebenen Welle kann also immer senkrecht zur x-Achse gewählt werden, d. h. senkrecht zur Ausbreitungsrichtung dieser Welle.

Eine ebene Welle pflanze sich in Richtung der positiven x-Achse fort. Alle die Welle charakterisierenden Größen, insbesondere $\boldsymbol{A}$, sind dann nur Funktionen von $t - x/c$. Aus der Gleichung

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$$

erhalten wir daher

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{A}', \qquad \boldsymbol{H} = [\nabla \boldsymbol{A}] = \left[\nabla\left(t - \frac{x}{c}\right) \cdot \boldsymbol{A}'\right] = -\frac{1}{c}[\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{A}'], \tag{69,3}$$

wo der Strich die Ableitung nach $t - x/c$ bedeutet und $\boldsymbol{n}$ den Einheitsvektor der Ausbreitungsrichtung der Welle darstellt. Wir setzen die erste Gleichung in die zweite ein und finden

$$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{E}]. \tag{69,4}$$

Das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ und das Magnetfeld $\boldsymbol{H}$ einer ebenen Welle stehen somit senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung dieser Welle. Die elektromagnetischen Wellen werden daher als *transversale* Wellen bezeichnet. Weiter entnimmt man aus (69,4), daß die elektrische und magnetische Feldstärke aufeinander senkrecht stehen und denselben Betrag haben.

Der Energiestrom einer ebenen Welle, d. h. ihr POYNTING-Vektor, ist

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{H}] = \frac{c}{4\pi}E^2\,\boldsymbol{n} = \frac{c}{4\pi}H^2\,\boldsymbol{n}.$$

Die Energieströmung erfolgt also in der Ausbreitungsrichtung der Welle. Mit der Energiedichte $W = \frac{1}{8\pi}(E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi}$ können wir

$$\boldsymbol{S} = c\,W\,\boldsymbol{n} \tag{69,5}$$

schreiben, in Übereinstimmung damit, daß sich das Feld mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Der Impuls des elektromagnetischen Feldes beträgt pro Volumeneinheit $\boldsymbol{S}/c^2$, bei der ebenen Welle also $(W/c)\,\boldsymbol{n}$. Es sei darauf hingewiesen, daß das Verhältnis zwischen der Energie W und dem Impuls W/c der Welle dasselbe ist wie bei Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (siehe (39,12)).

Der Impulsstrom des Feldes ist durch die Komponenten σ_{ik} (58,5) des MAXWELLschen Spannungstensors bestimmt. Wählen wir zunächst als Ausbreitungsrichtung der Welle die x-Achse, so ergibt sich als einzige von Null verschiedene Komponente

$$\sigma_{xx} = W. \tag{69,6}$$

Auch der Impulsstrom hat daher die Richtung der Wellenausbreitung und ist gleich der Energiedichte.

Aufgabe

Man bestimme die auf eine Wand (mit dem Reflexionsvermögen R) wirkende Kraft, wenn an ihr eine elektrische Welle reflektiert wird.

Lösung. Die auf die Flächeneinheit der Wand wirkende Kraft f ist gleich dem Impulsstrom durch die Fläche, also gleich dem Vektor

$$f_i = \sigma_{ik}\,N_k + \sigma'_{ik}\,N_k,$$

wo $\boldsymbol{N}$ der Normalenvektor der Wandfläche und σ_{ik} und σ'_{ik} die Komponenten des Tensors der einfallenden und reflektierten Welle sind. Mit (69,6) erhalten wir

$$\boldsymbol{f} = W\,\boldsymbol{n}\,(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{n}) + W'\,\boldsymbol{n}'\,(\boldsymbol{N}\,\boldsymbol{n}')\,.$$

Nach der Definition des Reflexionsvermögens gilt $W' = R\,W$. Führen wir den Einfallswinkel θ (bzw. den mit ihm gleichen Reflexionswinkel) ein, so ergibt sich für die Normalkomponente der Kraftdichte (den sogenannten „Lichtdruck")

$$f = W\,(1 + R)\cos^2\theta$$

und für die Tangentialkomponente

$$f_t = W\,(1 - R)\sin\theta\cos\theta\,.$$

§ 70. Die monochromatische ebene Welle

Wichtige Spezialfälle elektromagnetischer Wellen sind diejenigen, bei denen das Feld eine periodische Funktion der Zeit ist. Sie werden *monochromatisch* genannt. In einer monochromatischen Welle hängen alle Größen (das Potential und die Feldkomponenten) nur durch einen Faktor $\cos(\omega\,t + \alpha)$ von der Zeit ab. ω ist die *Kreisfrequenz* der Welle (wir werden sie hier kurz als Frequenz bezeichnen).

Bei einer sich längs der x-Achse ausbreitenden ebenen Welle sind die Feldkomponenten nur Funktionen von $t - x/c$. Eine monochromatische ebene Welle muß daher ein in $t - x/c$ periodisches Feld besitzen. Das Vektorpotential einer derartigen Welle läßt sich am bequemsten durch den Realteil einer komplexen Größe darstellen:

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{Re}\,\{\boldsymbol{A}_0\,\mathrm{e}^{-i\omega(t - x/c)}\}\,. \tag{70,1}$$

Hier ist $\boldsymbol{A}_0$ irgendein konstanter komplexer Vektor. Offensichtlich haben dann auch die Feldstärken $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ dieser Welle eine entsprechende Gestalt mit derselben Frequenz ω. Die Größe

$$\lambda = \frac{2\,\pi\,c}{\omega} \tag{70,2}$$

heißt Wellenlänge; es ist die Periode der Änderung des Feldes in der x-Richtung zum festen Zeitpunkt t.

Der Vektor

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\,\boldsymbol{n} \tag{70,3}$$

wird *Wellenvektor* genannt ($\boldsymbol{n}$ ist der Einheitsvektor in der Ausbreitungsrichtung der Welle). Mit ihm können wir (70,1) in der Form

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{Re}\,\{\boldsymbol{A}_0\,\mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t)}\} \tag{70,4}$$

darstellen, die von der Wahl der Koordinatenachsen unabhängig ist. Die als Faktor von i in der Potenz auftretende Größe heißt *Phase* der Welle.

Solange wir an unseren Größen nur lineare Operationen durchführen, können wir das Re-Zeichen fortlassen und mit den komplexen Größen selbst arbeiten.[1]) Setzen wir

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r} - \omega t)}$$

in (69,3) ein, so erhalten wir damit die Beziehungen zwischen Feldstärke und Vektorpotential einer ebenen monochromatischen Welle in der Gestalt

$$\boldsymbol{E} = i\, k\, \boldsymbol{A}\,, \qquad \boldsymbol{H} = i\,[\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{A}]\,. \tag{70,5}$$

Wir wollen nun ausführlich die Richtung des Feldes einer monochromatischen Welle untersuchen, und zwar beziehen wir uns auf das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\,\{\boldsymbol{E}_0\, e^{i(\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r} - \omega t)}\}$$

(alles für das elektrische Feld Gesagte gilt auch für das Magnetfeld). $\boldsymbol{E}_0$ ist irgendein komplexer Vektor und sein Quadrat $\boldsymbol{E}_0^2$ irgendeine, im allgemeinen auch komplexe Zahl. Ist das Argument dieser Zahl -2α (d. h. gilt $\boldsymbol{E}_0^2 = |\boldsymbol{E}_0^2|\, e^{-2i\alpha}$), so hat der durch

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{b}\, e^{-i\alpha} \tag{70,6}$$

bestimmte Vektor $\boldsymbol{b}$ dasselbe reelle Quadrat $\boldsymbol{b}^2 = |\boldsymbol{E}_0|^2$. Damit schreiben wir

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\,\{\boldsymbol{b}\, e^{i(\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r} - \omega t - \alpha)}\}\,. \tag{70,7}$$

Wir setzen $\boldsymbol{b}$ in der Form

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 + i\,\boldsymbol{b}_2$$

an, wobei $\boldsymbol{b}_1$ und $\boldsymbol{b}_2$ zwei reelle Vektoren sind. Da das Quadrat $\boldsymbol{b}^2 = b_1^2 - b_2^2 + 2\,i\,\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{b}_2$ reell ist, muß $\boldsymbol{b}_1\,\boldsymbol{b}_2 = 0$, d. h. $\boldsymbol{b}_1$ zu $\boldsymbol{b}_2$ orthogonal sein. Die Richtung von $\boldsymbol{b}_1$ wählen wir zur y-Achse (die x-Achse ist die Ausbreitungsrichtung). Dann

[1]) Sind zwei Größen $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$ in komplexer Gestalt geschrieben:

$$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_0\, e^{-i\omega t}\,, \qquad \boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{B}_0\, e^{-i\omega t}\,,$$

so hat man natürlich bei der Bildung ihres Produktes nur den Realteil zu benutzen. Interessiert uns aber, wie es häufig vorkommt, lediglich das Zeitmittel dieses Produktes, so kann man es als

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^*)$$

berechnen. In der Tat ist nämlich

$$\mathrm{Re}\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{Re}\,\boldsymbol{B} = \frac{1}{4}\,(\boldsymbol{A}_0\, e^{-i\omega t} + \boldsymbol{A}_0^*\, e^{i\omega t})\,(\boldsymbol{B}_0\, e^{-i\omega t} + \boldsymbol{B}_0^*\, e^{i\omega t})\,.$$

Bei der Mittelbildung verschwinden die den Faktor $e^{\pm 2 i\omega t}$ enthaltenden Glieder, so daß

$$\overline{\mathrm{Re}\,\boldsymbol{A}\,\mathrm{Re}\,\boldsymbol{B}} = \frac{1}{4}\,(\boldsymbol{A}_0\,\boldsymbol{B}_0^* + \boldsymbol{A}_0^*\,\boldsymbol{B}_0) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^*)$$

bleibt.

folgt aus (70,7)

$$\left.\begin{aligned} E_y &= b_1 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r} + \alpha)\,, \\ E_z &= \pm\, b_2 \sin(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r} + \alpha)\,, \end{aligned}\right\} \tag{70,8}$$

wo $+$ oder $-$ steht, je nachdem, ob $\boldsymbol{b}_2$ in die positive oder negative Richtung der z-Achse zeigt. Aus (70,8) ergibt sich

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1\,. \tag{70,9}$$

Es zeigt sich also, daß an jedem Raumpunkt der elektrische Vektor in der zur Ausbreitungsrichtung der Welle senkrechten Ebene rotiert. Eine solche Welle heißt *elliptisch polarisiert*. Je nachdem, ob das Vorzeichen in (70,8) positiv oder negativ ist, entspricht diese Rotation der einer sich in die x-Achse eindrehenden Rechtsschraube oder verläuft umgekehrt.

Im Falle $b_1 = b_2$ entartet die Ellipse (70,9) in einen Kreis, d. h., der rotierende Vektor $\boldsymbol{E}$ behält ständig seine Größe bei. Die Welle wird dann *zirkular polarisiert* genannt. Die Wahl der y- und z-Achse ist dabei offenbar willkürlich. Das Verhältnis zwischen der y- und z-Komponente der komplexen Amplitude $\boldsymbol{E}_0$ beträgt hier

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm\, i\,, \tag{70,10}$$

wobei die beiden Vorzeichen einer Rotation in Schraubenrichtung bzw. entgegengesetzt entsprechen (rechts und links polarisiertes Licht)[1].

Ist schließlich b_1 oder b_2 Null, so ist das Wellenfeld immer einer festen Richtung parallel (oder antiparallel). In diesem Falle wird die Welle als *linear polarisiert* bezeichnet. Die elliptisch polarisierte Welle kann offensichtlich als Überlagerung von zwei linear polarisierten Wellen betrachtet werden.

§ 71. Der DOPPLER-Effekt

Wir kehren zur Definition des Wellenvektors zurück und führen den vierdimensionalen Wellenvektor mit den Komponenten

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \boldsymbol{k}\right) \tag{71,1}$$

ein. Daß diese Größe tatsächlich einen Vierervektor bildet, erkennt man daraus, daß sie nach Multiplikation mit dem Vierervektor x^μ einen Skalar, nämlich die Phase der Welle

$$k_\mu x^\mu = \omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r}\,. \tag{71,2}$$

ergibt. Aus (70,3) und (71,1) entnimmt man, daß das Quadrat des Wellenzahlvierervektors verschwindet:

$$k_\mu k^\mu = 0\,. \tag{71,3}$$

[1]) Selbstverständlich sollen die Achsen x, y, z wie üblich ein Rechtssystem bilden.

Unter Benutzung des Transformationsgesetzes für den Wellenvierervektor kann man auch den sogenannten DOPPLER-*Effekt* behandeln, d. h. die Veränderung der Frequenz ω der von einer relativ zum Beobachter bewegten Quelle ausgestrahlten Welle gegenüber der „Eigenfrequenz" ω_0 dieser Welle, die im Ruhsystem K_0 der Quelle gemessen wird.

Es sei V die Geschwindigkeit der Quelle, d. h. die Geschwindigkeit des Bezugssystems K_0 relativ zu K. Nach dem allgemeinen Transformationsgesetz eines Vierervektors gilt

$$k^{(0)\,0} = \frac{k^0 - \frac{V}{c} k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

(die Geschwindigkeit von K relativ zu K_0 ist $-V$). Setzen wir hier $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k \cos\alpha = \frac{\omega}{c} \cos\alpha$ ein, wo α der im System K bestimmte Winkel zwischen der Ausbreitungsrichtung der Welle und der Bewegungsrichtung der Quelle ist, und drücken wir ω durch ω_0 aus, so erhalten wir

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c} \cos\alpha} \,. \tag{71,4}$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Für $V \ll c$ ergibt sie, wenn α nicht zu nahe bei $\pi/2$ liegt,

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 + \frac{V}{c} \cos\alpha\right). \tag{71,5}$$

Im Falle $\alpha = \pi/2$ haben wir

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{V^2}{2 c^2}\right); \tag{71,6}$$

hier ist das Frequenzverhältnis proportional dem Quadrat von V/c.

§ 72. FOURIER-Zerlegung

Für jede Welle läßt sich eine FOURIER-*Zerlegung* durchführen, d. h., sie läßt sich stets als eine Überlagerung monochromatischer Wellen mit verschiedenen Frequenzen darstellen. Die Art dieser Zerlegung hängt von der Zeitabhängigkeit des Feldes ab.

Die eine Gruppe bilden die Fälle, in denen die Entwicklung diskrete Frequenzen besitzt. Das einfachste Beispiel hierfür ist die Zerlegung eines rein periodischen (nicht monochromatischen) Feldes. Sie ergibt eine gewöhnliche FOURIER-Reihe und enthält Frequenzen, die ganzzahlige Vielfache einer „Grundfrequenz"

$\omega_0 = 2\pi/T$ sind (T ist die Periode des Feldes). Wir schreiben sie in der Form

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{-i\omega_0 n t} \tag{72,1}$$

(f ist eine beliebige, das Feld beschreibende Größe). Die Werte der Größen f_n bestimmen sich aus f durch die Integrale

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \, e^{i n \omega_0 t} \, dt \, . \tag{72,2}$$

Da die Funktion $f(t)$ reell ist, gilt $f_{-n} = f_n^*$ (72,3)

In allgemeineren Fällen hat man in der Entwicklung auch solche Frequenzen zuzulassen, die ganzzahlige Vielfache (und darüber erstreckte Summen) von mehreren, nicht aufeinander reduzierbaren Grundfrequenzen sind.

Quadrieren wir die Summe (72,1), so verschwindet im Zeitmittel das Produkt von Gliedern mit verschiedenen Frequenzen, da sie oszillierende Faktoren enthalten. Es bleiben nur Glieder der Form $f_n f_{-n} = |f_n|^2$. Das mittlere Quadrat des Feldes (die mittlere Intensität der Welle) ist also gleich der Summe der Intensitäten der monochromatischen Komponenten:

$$\overline{f^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2, \tag{72,4}$$

(der über eine Periode gemittelte Wert von $f(t)$ ist Null: $f_0 = \bar{f} = 0$).

Zu der anderen Gruppe gehören die Felder, die sich durch ein FOURIER-Integral mit stetig veränderlichen Frequenzen darstellen lassen. Dazu muß die Funktion $f(t)$ bestimmten Bedingungen genügen; wir haben es gewöhnlich mit Funktionen zu tun, die für $t \to \pm\infty$ verschwinden. Eine Zerlegung dieser Art hat die Gestalt

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \, e^{-i\omega t} \, d\omega/2\pi \, , \tag{72,5}$$

wobei sich die FOURIER-Komponenten mittels $f(t)$ durch

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, e^{i\omega t} \, dt \tag{72,6}$$

darstellen.

Die Komponenten mit entgegengesetztem Vorzeichen von ω hängen durch

$$f_{-\omega} = f_\omega^* \tag{72,7}$$

zusammen. Wir berechnen nun das Integral von f^2 über die gesamte Zeit. Mit (72,5) und (72,6) erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega \, e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ f_\omega \int_{-\infty}^{\infty} f \, e^{-i\omega t} \, dt \right\} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega f_{-\omega} \frac{d\omega}{2\pi}$$

oder, wenn wir (72,7) berücksichtigen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f_\omega|^2 \, \mathrm{d}\omega = \int_{0}^{\infty} |f_\omega|^2 \, \mathrm{d}\omega \cdot \frac{1}{2\pi} . \qquad (72,7)$$

Dadurch drückt sich die Gesamtintensität durch die Intensität der Komponenten der FOURIER-Wellen aus.

§ 73. Teilweise polarisiertes Licht

Jede monochromatische Welle ist definitionsgemäß polarisiert. Gewöhnlich hat man es jedoch mit Wellen zu tun, die nur annähernd monochromatisch sind, d. h. Frequenzen aus einem kleinen Intervall $\Delta\omega$ enthalten. Wir betrachten eine solche Welle mit einer mittleren Frequenz ω. Dann läßt sich ihr Feld (im folgenden ist dabei immer das elektrische Feld $\boldsymbol{E}$ gemeint) für jeden Punkt des Raumes in der Form

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0(t)\, \mathrm{e}^{-i\omega t}$$

schreiben, wobei die komplexe Amplitude $\boldsymbol{E}_0(t)$ eine langsam veränderliche Funktion der Zeit ist (für eine streng monochromatische Welle wäre $\boldsymbol{E}_0 = \text{const}$). Da $\boldsymbol{E}_0$ die Polarisation der Welle angibt, bedeutet dies, daß sich an jedem Punkt der Welle deren Polarisation mit der Zeit ändert. Eine derartige Welle heißt *teilweise polarisiert.*

Die Polarisationseigenschaften elektromagnetischer Wellen, insbesondere die des Lichtes, werden experimentell dadurch untersucht, daß man das Licht durch bestimmte feste Körper, z. B. durch NICOLsche Prismen, schickt und die Änderung der Intensität mißt. Mathematisch bedeutet dies, daß mit Hilfe der Werte von quadratischen Funktionen des Feldes Aussagen über die Polarisationseigenschaften des Lichtes gemacht werden. Dabei handelt es sich selbstverständlich stets um die zeitlichen Mittelwerte dieser Funktionen.

Eine quadratische Funktion des Feldes besteht aus Gliedern, die zu den Produkten $E_i\, E_k$, $E_i^*\, E_k^*$ oder $E_i\, E_k^*$ proportional sind. Die Produkte der Gestalt

$$E_i\, E_k = E_{0i}\, E_{0k}\, \mathrm{e}^{-2i\omega t}, \qquad E_i^*\, E_k^* = E_{0i}^*\, E_{0k}^*\, \mathrm{e}^{2i\omega t}$$

enthalten die schnell oszillierenden Faktoren $\mathrm{e}^{\pm 2i\omega t}$, die bei der Mittelung über die Zeit verschwinden. Das Produkt $E_i\, E_k^* = E_{0i}\, E_{0k}^*$ enthält keinen solchen Faktor, sein Mittelwert ist deswegen von Null verschieden. Die Eigenschaften des teilweise polarisierten Lichtes werden demnach vollständig durch den Tensor

$$J_{ik} = \overline{E_{0i}\, E_{0k}^*} \qquad (73,1)$$

beschrieben.

Da der Vektor $\boldsymbol{E}_0$ stets in der zur Wellenrichtung senkrechten Ebene liegt, hat der Tensor J_{ik} nur vier Komponenten (in diesem Paragraphen nehmen die

Indizes i, k nur zwei Werte an: $i, k = 1, 2$, sie entsprechen der y- und der z-Achse, die x-Achse liegt in der Ausbreitungsrichtung der Welle).

Die Summe der Diagonalelemente von J_{ik} (wir bezeichnen sie mit J) ist eine reelle Größe — der Mittelwert des Betragquadrates des Vektors $\boldsymbol{E}_0$:

$$J \equiv J_{ii} = \overline{\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{E}_0^*} \,. \tag{73,2}$$

Diese Größe gibt die durch die Energiestromdichte gemessene Intensität der Welle. Um diese Größe, die nichts mit den Polarisationseigenschaften zu tun hat, auszuschließen, führen wir anstelle von J_{ik} den Tensor

$$\varrho_{ik} = \frac{J_{ik}}{J}, \tag{73,3}$$

für den $\varrho_{ii} = 1$ gilt, ein. Wir bezeichnen ihn als Polarisationstensor.

Aus der Definition (73,1) folgt, daß die Komponenten des Tensors J_{ik}, und damit auch die von ϱ_{ik}, durch die Beziehungen

$$\varrho_{ik} = \varrho_{ki}^* \tag{73,4}$$

verknüpft sind, d. h., der Tensor ist hermitesch. Auf Grund dieser Beziehungen sind die Diagonalelemente ϱ_{11} und ϱ_{22} reell, wobei $\varrho_{11} + \varrho_{22} = 1$ gilt, und es ist $\varrho_{21} = \varrho_{12}^*$. Der Polarisationstensor wird also insgesamt nur durch drei reelle Parameter charakterisiert.

Wir wollen nun die Bedingungen untersuchen, die der Tensor ϱ_{ik} erfüllen muß, damit das Licht vollständig polarisiert ist. In diesem Fall gilt $\boldsymbol{E}_0 = \text{const}$, und deswegen haben wir einfach

$$J_{ik} = J\,\varrho_{ik} = E_{0i} E_{0k}^* \tag{73,5}$$

(ohne Mittelung), d. h., die Komponenten des Tensors können in der Form eines Produktes der Komponenten eines konstanten Vektors dargestellt werden. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist das Verschwinden der Determinante:

$$|\varrho_{ik}| = \varrho_{11}\varrho_{22} - \varrho_{12}\varrho_{21} = 0 \,. \tag{73,6}$$

Das Gegenteil dazu ist das nicht polarisierte, sog. *natürliche* Licht. Das vollständige Fehlen der Polarisation bedeutet, daß alle Richtungen (in der Ebene yz) vollständig äquivalent sind. Mit anderen Worten, der Polarisationstensor hat die Gestalt

$$\varrho_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik} \,. \tag{73,7}$$

Die Determinante ist dabei $|\varrho_{ik}| = 1/4$.

Ein beliebiger Tensor ϱ_{ik} kann in zwei Teile, in den symmetrischen (bezüglich der Indizes i und k) und in den antisymmetrischen zerlegt werden. Betrachten wir den Spezialfall des Verschwindens des antisymmetrischen Teiles. Infolge der Beziehung (73,4) ist der symmetrische Tensor ϱ_{ik} gleichzeitig auch reell ($\varrho_{ik} = \varrho_{ik}^*$). Er kann wie jeder symmetrische Tensor auf Hauptachse mit zwei verschiedenen Hauptwerten, die wir mit λ_1 und λ_2 bezeichnen, transformiert werden. Die Rich-

tungen der beiden Hauptachsen stehen aufeinander senkrecht, die Einheitsvektoren in diese Richtungen bezeichnen wir mit $\boldsymbol{n}^{(1)}$ und $\boldsymbol{n}^{(2)}$. ϱ_{ik} kann dann in der Form

$$\varrho_{ik} = \lambda_1 n_i^{(1)} n_k^{(1)} + \lambda_2 n_i^{(2)} n_k^{(2)}, \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \,. \tag{73,8}$$

dargestellt werden. Die Größen λ_1 und λ_2 sind positiv und durchlaufen Werte von 0 bis 1.

Jeder der beiden Terme in (73,8) hat die Gestalt eines Produktes zweier Komponenten eines konstanten reellen Vektors ($\sqrt{\lambda_1}\,\boldsymbol{n}^{(1)}$ oder $\sqrt{\lambda_2}\,\boldsymbol{n}^{(2)}$). Jedes dieser Glieder entspricht mit anderen Worten linear polarisiertem Licht. Ferner sieht man, daß in (73,8) keine Terme, die Produkte der Komponenten dieser beiden Wellen enthalten, auftreten. Das bedeutet, daß man beide Terme als physikalisch unabhängig voneinander oder, wie man sagt, als nichtkohärent betrachten kann. Sind nämlich zwei Wellen unabhängig voneinander, so ist der Mittelwert des Produktes $E_i^{(1)} E_k^{(2)}$ gleich dem Produkt der Mittelwerte jedes Faktors, und da jeder dieser Mittelwerte gleich Null ist, gilt:

$$\overline{E_i^{(1)} E_k^{(2)}} = 0 \,.$$

Im betrachteten Fall des teilweise polarisierten Lichtes kann man also die Welle als Überlagerung zweier nichtkohärenter Wellen (mit Intensitäten proportional zu λ_1 und λ_2) ansehen, die linear in zu einander senkrechten Richtungen polarisiert sind. Im allgemeinen Fall eines komplexen Tensors ϱ_{ik} kann man zeigen, daß das Licht als Überlagerung von zwei nichtkohärenten elliptisch polarisierten Wellen dargestellt werden kann, deren Polarisationsellipsen ähnlich und aufeinander senkrecht sind.

§ 74. Geometrische Optik

Eine ebene Welle ist durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß ihre Ausbreitungsrichtung und Amplitude unveränderlich sind. Für eine beliebige elektromagnetische Welle gilt das natürlich nicht mehr.

Man kann jedoch eine nichtebene Welle in vielen Fällen in einem genügend kleinen Raumgebiet als eben betrachten. Dazu ist offenbar nötig, daß sich Amplitude und Richtung der Welle beim Fortschreiten um eine Wellenlänge nur sehr wenig ändern. Ist die Bedingung erfüllt, so läßt sich die sogenannte *Wellenfläche* einführen, deren Punkte (zu einem bestimmten Zeitpunkt) die gleiche Wellenphase besitzen (die Wellenfläche einer ebenen Welle ist offensichtlich die zur Ausbreitungsrichtung der Welle senkrechte Ebene). In jedem hinreichend kleinen Teil des Raumes kann man dann von einer Ausbreitungsrichtung der Welle als der Normalen zur Wellenfläche sprechen. Man kann dann den Begriff eines Strahls einführen, das ist die Linie, deren Tangente in jedem Punkte mit der Ausbreitungsrichtung der Welle zusammenfällt.

Die Untersuchung der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen unter diesen Voraussetzungen bildet den Gegenstand der *geometrischen Optik*. Die geometri-

sche Optik betrachtet die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, insbesondere des Lichtes, als eine Ausbreitung von Strahlen, von deren Wellennatur man völlig absieht, oder anders gesagt, sie entspricht dem Grenzfalle kleiner Wellenlängen, $\lambda \to 0$.

Wir kommen nun zur Ableitung der Grundgleichung der geometrischen Optik, die die Richtung der Strahlen bestimmt. Es sei f eine beliebige das Wellenfeld beschreibende Größe (etwa die Komponenten von $\boldsymbol{E}$ oder $\boldsymbol{H}$). Für eine ebene monochromatische Welle hat f die Gestalt

$$f = a\, e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{r} - \omega t + \alpha)} \tag{74,1}$$

(hier und im folgenden ist stets der Realteil zu nehmen; wir lassen das Zeichen Re fort).

Allgemein schreiben wir für das Feld

$$f = a\, e^{i\psi}\,. \tag{74,2}$$

Ist die Welle nicht eben, die geometrische Optik aber anwendbar, so ist die Amplitude a im allgemeinen eine Funktion von Ort und Zeit; ferner hat die Phase ψ, das sogenannte *Eikonal*, nicht mehr die einfache Form wie in (74,1). Wesentlich ist jedoch, daß das Eikonal ψ groß ist. Dies ist unmittelbar daraus ersichtlich, daß es sich beim Fortschreiten um eine Wellenlänge um den Wert 2π ändert und die geometrische Optik dem Grenzfall $\lambda \to 0$ entspricht.

Für kleine Raumbereiche und Zeitintervalle kann das Eikonal ψ in eine Reihe entwickelt werden. Bis auf Glieder zweiter und höherer Ordnung hat man dann

$$\psi = \psi_0 + \boldsymbol{r}\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{r}} + t\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

(der Koordinatenursprung und der Anfangspunkt der Zeitzählung sind im betrachteten Raumgebiet und Zeitintervall gewählt. Die Werte der Ableitungen beziehen sich auf diese Punkte). Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (74,1), so können wir, da wir in einem genügend kleinen Raumbereich und Zeitintervall die Welle als eben ansehen können,

$$\boldsymbol{k} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{r}} \equiv \operatorname{grad} \psi\,, \qquad \omega = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{74,3}$$

setzen.

Zur Bestimmung des Wellenvektors verwenden wir die Beziehung $\boldsymbol{k}^2 = \omega^2/c^2$. Setzen wir hier $\boldsymbol{k}$ und ω aus (74,3) ein, so erhalten wir:

$$(\nabla \psi)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2. \tag{74,4}$$

Diese Differentialgleichung mit partiellen Ableitungen erster Ordnung heißt *Eikonalgleichung* und stellt die Grundgleichung der geometrischen Optik dar.

Die Gleichung (74,4) kann man auch unmittelbar durch den Grenzübergang $\lambda \to 0$ aus der Wellengleichung herleiten. Das Feld f genügt der Wellengleichung

$$\Delta f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\,. \tag{74,5}$$

Für die Funktion (74,2) finden wir:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} e^{i\psi} + 2\,i \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial \psi}{\partial t} e^{i\psi} + i\,f \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 f\,.$$

Nun ist das Eikonal in der geometrischen Optik ein großer Wert. Wir können daher die ersten drei Terme gegenüber dem vierten vernachlässigen und erhalten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \approx -\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 f\,.$$

Analog finden wir

$$\Delta f \approx -(\nabla \psi)^2 f\,,$$

und durch Einsetzen in (74,5) wieder die Gleichung (74,4).

Aus der Form der Eikonalgleichung folgt eine bemerkenswerte Analogie zwischen der geometrischen Optik und der Mechanik materieller Teilchen. In der Mechanik kann die Bewegungsgleichung der Teilchen in Form der Hamilton-Jacobi-Gleichung für die Wirkung S (§ 31) aufgestellt werden. Diese Gleichung ist, wie die Eikonalgleichung, eine Gleichung mit partiellen Ableitungen erster Ordnung. Dabei hängt die Wirkung S mit dem Impuls $\boldsymbol{p}$ und der Hamilton-Funktion $\mathfrak{H}$ des Teilchens durch

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{r}}\,, \qquad \mathfrak{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

zusammen. Vergleichen wir diese Formeln mit (74,3), so sehen wir, daß der Wellenvektor in der geometrischen Optik die Rolle des Teilchenimpulses der Mechanik und die Frequenz die Rolle der Hamilton-Funktion, d. h. der Energie des Teilchens spielen. Der Betrag k des Wellenvektors hängt mit der Frequenz durch $k = \omega/c$ zusammen. Diese Gleichung entspricht der Beziehung $p = \mathfrak{E}/c$ zwischen Energie und Impuls eines Teilchens mit verschwindender Ruhmasse, das sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt.

Für ein Teilchen gelten die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \boldsymbol{r}}\,, \qquad \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \boldsymbol{p}}\,.$$

Mittels der gefundenen Analogie lassen sich unmittelbar ähnliche Gleichungen für die Lichtstrahlen angeben:

$$\dot{\boldsymbol{k}} = -\frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{r}}\,, \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{k}}\,. \tag{74,6}$$

Im Vakuum ist $\omega = c\,k$, so daß $\dot{\boldsymbol{k}} = 0$, $\boldsymbol{v} = c\,\boldsymbol{n}$ gilt ($\boldsymbol{n}$ ist der Einheitsvektor in der Ausbreitungsrichtung). Wie auch zu verlangen ist, erscheinen somit im Vakuum die Strahlen als Geraden. Das Licht breitet sich längs dieser Geraden mit der Geschwindigkeit c aus.[1])

[1]) Da die in bezug auf die Lichtausbreitung im Vakuum angegebenen Gleichungen zu vorauszusehenden Ergebnissen führten, ist es wichtig, daß sich diese Schlüsse in ihrer allgemeinen Form auch auf die Lichtausbreitung in materiellen Körpern anwenden lassen. Namentlich in diesem Falle besteht eine Analogie zur Bewegung von Teilchen in einem äußeren Kraftfeld.

§ 75. Grenzen der geometrischen Optik

Nach der Definition einer ebenen monochromatischen Welle ist ihre Amplitude immer und überall dieselbe. Eine solche Welle ist in allen Raumrichtungen unendlich weit ausgedehnt und existiert im gesamten Zeitintervall von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$. Jede Welle, die eine nicht überall und zu jeder Zeit konstante Amplitude besitzt, ist nur mehr oder weniger monochromatisch. Wir wollen uns hier mit der Frage beschäftigen, in welchem Grade eine Welle „nichtmonochromatisch" ist.

Betrachten wir eine elektromagnetische Welle mit einer Amplitude, die in jedem Raumpunkt eine Funktion der Zeit sein möge. ω_0 sei irgendeine mittlere Frequenz der Welle. Dann hat das Feld dieser Welle (etwa das elektrische) in einem bestimmten Punkt die Gestalt $\boldsymbol{E}_0(t)\, e^{-i\omega_0 t}$. Dieses Feld ist zwar nicht selbst monochromatisch, kann jedoch in monochromatische Komponenten zerlegt, d. h. durch ein Fourier-Integral dargestellt werden. Die Amplitude derjenigen Komponente dieser Entwicklung, die der Frequenz ω entspricht, ist dem Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{E}_0(t)\, e^{i(\omega-\omega_0)t}\, dt$$

proportional. Der Faktor $e^{i(\omega-\omega_0)t}$ ist eine periodische Funktion mit verschwindendem Mittelwert. Wäre $\boldsymbol{E}_0$ immer konstant, so hätte das Integral für alle $\omega \neq \omega_0$ den Wert Null. Ist dagegen $\boldsymbol{E}_0(t)$ zeitabhängig, ändert sich jedoch auf einem Zeitabschnitt der Größe $1/|\omega-\omega_0|$ nur sehr wenig, so ist das Integral näherungsweise Null, und zwar gilt dies um so genauer, je langsamer sich $\boldsymbol{E}_0$ ändert. Damit das Integral merklich von Null abweicht, muß sich $\boldsymbol{E}_0(t)$ in einem Zeitintervall der Größe $1/|\omega-\omega_0|$ beträchtlich ändern.

Im folgenden wollen wir mit Δt das Zeitintervall bezeichnen, in dessen Verlauf sich die Wellenamplitude an einem Raumpunkt merklich ändert. Aus unseren Überlegungen folgt dann, daß die größte Abweichung der Frequenzen von ω_0, die in die spektrale Entwicklung der Welle noch mit merklicher Intensität eingeht, sich aus der Bedingung $\Delta t \sim 1/|\omega-\omega_0|$ bestimmt. Nennen wir das Frequenzintervall (um die mittlere Frequenz ω_0) in der spektralen Zerlegung $\Delta\omega$, so gilt also die Beziehung

$$\Delta\omega\, \Delta t \sim 1\,. \tag{75,1}$$

Wir sehen, daß die Welle in der Tat umso monochromatischer (d. h. $\Delta\omega$ um so kleiner) wird, je größer Δt ist, d. h. je langsamer sich die Amplitude der Welle in einem Raumpunkt ändert.

Beziehungen, die der Gleichung (75,1) entsprechen, lassen sich auch leicht für den Wellenvektor ableiten. Es seien Δx, Δy, Δz die Größenordnungen jener Entfernungen längs der Achsen x, y, z, für die sich die Wellenamplitude beträchtlich ändert. Für einen bestimmten Zeitpunkt hat das Wellenfeld als Funktion der (räumlichen) Koordinaten die Gestalt

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r})\, e^{i\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{r}}\,,$$

wo $\boldsymbol{k}_0$ den Mittelwert des Vektors bezeichnet. Ganz entsprechend der Ableitung von (75,1) finden wir für das Intervall $\Delta \boldsymbol{k}$ der Werte, die in der Entwicklung der Welle in einem FOURIER-Integral auftreten:

$$\Delta k_x \Delta x \sim 1 , \qquad \Delta k_y \Delta y \sim 1 , \qquad \Delta k_z \Delta z \sim 1 . \tag{75,2}$$

Als Spezialfall betrachten wir eine Welle, die im Verlauf eines endlichen Zeitintervalls ausgestrahlt wird. Mit Δt bezeichnen wir die Größenordnung dieses Zeitraumes. Die Amplitude der Welle ändert sich in einem gegebenen Raumpunkt während der Zeit Δt, in deren Verlauf die Welle ganz über diesen Punkt hinwegstreicht, offensichtlich beträchtlich. Auf Grund der Beziehung (75,1) können wir daher sagen, daß der Grad der „Nichtmonochromatizität" $\Delta\omega$ einer solchen Welle jedenfalls nicht kleiner als $1/\Delta t$ (jedoch offenbar größer) sein kann:

$$\Delta\omega \gtrsim \frac{1}{\Delta t} . \tag{75,3}$$

Sind entsprechend Δx, Δy, Δz die Größenordnungen der Wellenausdehnung im Raum, so finden wir für die Intervalle der Komponenten des Wellenvektors, die in der Entwicklung der Welle erscheinen,

$$\Delta k_x \gtrsim \frac{1}{\Delta x} , \qquad \Delta k_y \gtrsim \frac{1}{\Delta y} , \qquad \Delta k_z \gtrsim \frac{1}{\Delta z} . \tag{75,4}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, daß bei einem Lichtbündel endlicher Breite die Ausbreitungsrichtung nicht streng konstant sein kann. Legen wir die x-Achse in die (mittlere) Richtung der Lichtausbreitung im Bündel, so erhalten wir

$$\theta_y \gtrsim \frac{1}{k\,\Delta y} \sim \frac{\lambda}{\Delta y} , \tag{75,5}$$

wo θ_y größenordnungsmäßig die Abweichung des Bündels von der mittleren Richtung in der xy-Ebene darstellt und λ die Wellenlänge ist.

Weiter beantwortet (75,5) die Frage nach der Begrenzung der Schärfe optischer Abbildungen. Ein Lichtbündel, dessen Strahlen sich nach der geometrischen Optik sämtlich in einem Punkte schneiden sollten, liefert in Wirklichkeit das Bild nicht in Gestalt eines Punktes, sondern in Form einer gewissen Scheibe, für deren Durchmesser Δ wir nach (75,5)

$$\Delta \sim \frac{1}{k\,\theta} \sim \frac{\lambda}{\theta} . \tag{75,6}$$

haben, wo θ der Öffnungswinkel des Strahlenbündels ist. Diese Formel ist nicht nur auf das Bild, sondern auch auf den Gegenstand anwendbar. Es folgt nämlich, daß bei der Beobachtung eines aus einem Punkte austretenden Lichtbündels sich der Punkt nicht von einem Körper der Größe λ/θ unterscheidet. Die Gleichung (75,6) bestimmt daher auch die Grenzen des *Auflösungsvermögens* eines Mikroskops. Der kleinste Wert von Δ, den man für $\theta \sim 1$ erreichen kann, ist λ. Dies steht damit in Einklang, daß die Grenzen der geometrischen Optik durch die Wellenlänge des Lichtes bestimmt werden.

Aufgabe

Man finde die Größenordnung der kleinsten Breite eines Lichtbündels, das aus einem parallelen Lichtbündel in der Entfernung l von einer Blende entsteht.

Lösung. Bezeichnen wir den Durchmesser der Blendenöffnung mit d, so erhalten wir aus (75,5) für den Ablenkungswinkel des Lichtes (Beugungswinkel) einen Wert $\sim \lambda/d$, so daß die Breite des Bündels von der Ordnung $d + (\lambda/d)\, l$ ist. Der kleinste Wert dieser Größe ist $\sim \sqrt{\lambda\, l}$.

§ 76. FRESNELsche Beugung

Abweichungen von den Gesetzen der geometrischen Optik, die mit der Endlichkeit der Lichtwellenlänge zusammenhängen, führen zur Entstehung von Erscheinungen, die als *Beugung* bezeichnet werden. Solche Erscheinungen kann man z. B. beobachten, wenn sich Hindernisse auf dem Wege der Lichtausbreitung befinden, etwa undurchsichtige Körper (wir bezeichnen sie als *Schirme*), oder wenn das Licht durch Öffnungen in den Schirmen geht. Wären die Gesetze der geometrischen Optik streng erfüllt, so gäbe es hinter den Schirmen *Schattengebiete*, die scharf von den Gebieten getrennt wären, auf die Licht fällt. Die Beugung führt jedoch dazu, daß an Stelle der scharfen Grenzen zwischen Licht und Schatten dort eine komplizierte Intensitätsverteilung des Lichtes auftritt. Diese Beugungserscheinungen sind um so stärker ausgeprägt, je kleiner die Abmessungen der Schirme oder die Öffnungen in ihnen im Vergleich zur Wellenlänge sind.

Das Beugungsproblem kann allgemein nur für schwache Abweichungen von der geometrischen Optik betrachtet werden. Dadurch wird erstens vorausgesetzt, daß alle charakteristischen Abmessungen des Problems (Abmessungen der Schirme, Entfernungen der Schirme von der Lichtquelle und vom Beobachtungspunkt des Lichtes) groß im Vergleich zur Wellenlänge sind; zweitens werden nur kleine Abweichungen des Lichtverlaufs von den durch die geometrische Optik bestimmten Strahlrichtungen betrachtet.

Es sei irgendein Schirm mit einer Öffnung gegeben, durch die Licht von bestimmten Quellen hindurchgelangt. Abb. 31 zeigt diesen Schirm im Quer-

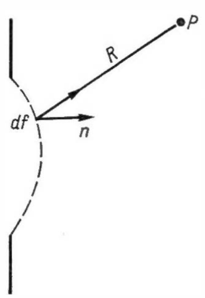


Abb. 31

schnitt (ausgezogene Linie); das Licht geht von links nach rechts. Mit u bezeichnen wir im folgenden eine beliebige Feldkomponente von $\boldsymbol{E}$ oder $\boldsymbol{H}$. Wir wollen dabei u als reine Funktion der (räumlichen) Koordinaten betrachten, d. h. ohne den die Zeitabhängigkeit bestimmenden Faktor $e^{-i\omega t}$. Unsere Aufgabe besteht in der Bestimmung des Feldes u_P (und der Lichtintensität $\sim |u_P|^2$) in einem Beobachtungspunkt P hinter dem Schirm. Als Näherungslösung dieser Aufgabe kann man in den Fällen, in denen die Abweichungen von der geometrischen Optik klein sind, den Wert für die Größe u_P in der Öffnung selbst so annehmen, wie er bei freier Lichtausbreitung auftreten würde, wenn keine Schirme vorhanden wären.

Wir führen irgendeine Fläche S ein, die die Öffnung im Schirm schließt und die durch den Rand der Öffnung begrenzt wird. (Der Querschnitt der Fläche ist in Abb. 31 gestrichelt dargestellt.) Diese Fläche zerlegen wir in Elemente $\mathrm{d}f$, die im Vergleich zu den Abmessungen der Öffnung klein sind, groß jedoch relativ zur Wellenlänge des Lichtes. Wir können dann jedes dieser Elemente, durch die das Licht hindurchgelangt, selbst als Lichtquelle ansehen, von der aus sich das Licht nach allen Seiten hin fortpflanzt. Das Feld im Punkte P ist das Ergebnis der Überlagerung aller von den Elementen der Fläche S ausgehenden Felder (dies ist das sogenannte HUYGENS*sche Prinzip*).

Das von dem Element $\mathrm{d}f$ im Punkte P erzeugte Feld ist dem Feldwert u an der Stelle von $\mathrm{d}f$ selbst proportional. Außerdem ist es zur Fläche $\mathrm{d}f_n$ proportional, die durch Projektion der Fläche $\mathrm{d}f$ auf die Ebene entsteht, die zur Strahlrichtung $\boldsymbol{n}$ (des von der Lichtquelle in $\mathrm{d}f$ ausgehenden Lichtes) senkrecht ist. Offensichtlich gehen bei beliebiger Form des Gebietes $\mathrm{d}f$ durch $\mathrm{d}f$ immer dieselben Lichtstrahlen (und somit bleibt die Wirkung auf das Feld im Punkt P gleich), wenn nur die Projektion $\mathrm{d}f_n$ sich nicht ändert.

Ferner ändert sich bei der Ausbreitung der Wellen von $\mathrm{d}f$ zum Punkt P deren Phase um kR (k ist der Betrag des Wellenvektors des Lichtes und R die Entfernung von $\mathrm{d}f$ nach P); daraus ergibt sich der Faktor $\exp(ikR)$. Die Amplitude der Wellen verringert sich in dieser Entfernung um den Faktor $1/R$.[1]) Somit ist der Feldanteil u_P jedes Elementes der Fläche S proportional zu $\mathrm{d}f_n \cdot u\, e^{ikR}/R$. Den vollen Betrag u_P erhält man durch Integration dieses Ausdruckes über die gesamte Fläche S:

$$u_P = \text{const} \cdot \int \frac{u\, e^{ikR}}{R}\, \mathrm{d}f_n\,. \tag{76,1}$$

Diese Formel ist der mathematische Ausdruck für das HUYGENSsche Prinzip. Wir bemerken, daß das Feld u_P bei der betrachteten Näherung nur von der Form der Randlinie abhängt und nicht etwa von der Form des Schirmes oder von dem Material, aus dem er hergestellt wurde.

[1]) Tatsächlich verringert sich die von einer punktförmigen Quelle ausgehende Intensität der Welle bei ihrer Ausbreitung proportional $1/R^2$, da sich der gesamte unverändert bleibende Energiestrom über die Oberfläche verteilt, die wie R^2 anwächst. Die Intensität wird aber durch das Amplitudenquadrat der Welle bestimmt.

Befinden sich die Lichtquelle (wir bezeichnen sie mit Q) und der Beobachtungspunkt P in endlicher Entfernung vom Schirm, so wird der Hauptbeitrag zum Integral (76,1) nur von einem kleinen Teil der Wellenfläche S, nämlich dem Teil in der Nähe der Geraden QP geliefert. Da nämlich die Abweichung von der geometrischen Optik vorraussetzungsgemäß nur gering ist, so fällt die in P von den verschiedenen Punkten der Wellenfläche S herrührende Lichtintensität sehr rasch mit der Entfernung von dieser Geraden ab, was der Ausbreitung des Lichtes von der Quelle zum Beobachtungspunkt durch geometrische Strahlen entspricht. Die Beugungserscheinungen, bei denen für die Integration in (76,1) nur ein kleiner Teil der Wellenfläche eine Rolle spielt, werden als *FRESNELsche Beugung* bezeichnet.

Wir wollen die FRESNELsche Beugung an einem gradlinig begrenzten Schirm betrachten. Die Quelle Q und der Beobachtungspunkt P sollen sich in der xz-Ebene befinden, und die Schirmlinie möge mit der y-Achse zusammenfallen, wie es in Abb. 32 gezeigt ist. Die Entfernung von der Lichtquelle Q zum Koordinatenursprung sei D_q. Mit D_p bezeichnen wir die x-Koordinate des Beobachtungspunktes P, mit d seinen Abstand von der xy-Ebene, wobei Werte $d < 0$

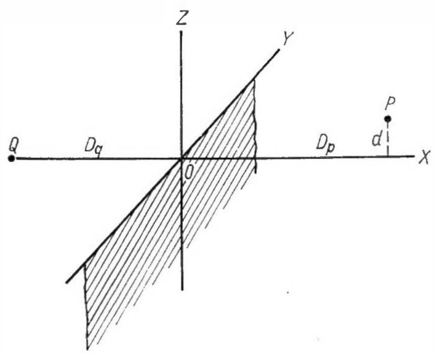


Abb. 32

Gebieten geometrischen Schattens (unterhalb der xy-Ebene) entsprechen. Wir wollen nun die Intensitätsverteilung des Lichtes in der Nähe der geometrischen Schattengrenze untersuchen, d. h. für (im Vergleich zu D_q und D_p) kleine Werte von d.

Als Integrationsfläche in (76,1) wählen wir die obere Halbebene yz. Wie schon weiter oben erwähnt wurde, stammt der Hauptanteil im Integral nur aus dem Gebiet in der Nähe des Koordinatenursprungs, d. h. aus dem Gebiet (im Verhältnis zu D_q und D_p) kleiner Werte von y und z. Bei der Berechnung des Integrals über diesen Bereich brauchen nur schnellveränderliche Exponentialausdrücke im Integranden berücksichtigt zu werden; den vergleichsweise langsam veränderlichen Faktor $1/R$ kann man als konstant ansehen.

Das Feld u der von der Quelle Q ausgehenden Welle ist im Abstand R_q proportional zu $\exp(i k R_q)$. Für Punkte auf der Integrationsfläche gilt

$$R_q = \sqrt{y^2 + z^2 + D_q^2} \approx D_q + \frac{1}{2 D_q}(y^2 + z^2) ,$$

so daß hier das Feld

$$u \sim \exp(i k R_q) \sim \exp\left(i k \frac{y^2 + z^2}{2 D_q}\right)$$

ist. Der Abstand zum Beobachtungspunkt ergibt sich aus

$$R = \sqrt{y^2 + (z - d)^2 + D_p^2} \approx D_p + \frac{1}{2 D_p}[y^2 + (z - d)^2] .$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (76,1) ein, so erhalten wir

$$u_P \sim \int_0^\infty \exp\left[i k \left(\frac{1}{2 D_q} z^2 + \frac{1}{2 D_p}(z - d)^2\right)\right] \mathrm{d}z . \tag{76,2}$$

Hier sind alle konstanten (von d unabhängigen) Faktoren fortgelassen, darunter auch das Integral über $\mathrm{d}y$. Wegen der schnellen Konvergenz des Integrals über $\mathrm{d}z$ kann die Integration bis ∞ erstreckt werden (obwohl im Integranden vorausgesetzt wurde, daß $d \ll D_q$, D_p ist).

Der Ausdruck (76,2) läßt sich auch in der Gestalt

$$u_P \sim \exp\left[i k \frac{d^2}{2 (D_p + D_q)}\right] \int_0^\infty \exp\left[i k \frac{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}\right) z - \frac{d}{D_p}\right]^2}{\frac{1}{D_p} + \frac{1}{D_q}}\right] \mathrm{d}z$$

schreiben. Die Intensität des Lichtes wird durch das Quadrat $|u_P|^2$ bestimmt, aus dem der vor dem Integral stehende Phasenfaktor herausfällt. Eine Substitution überführt das Integral in die Gestalt

$$u_P \sim \int_{-w}^\infty \mathrm{e}^{i \eta^2} \mathrm{d}\eta , \tag{76,3}$$

wobei

$$w = d \sqrt{\frac{k D_q}{2 D_p (D_q + D_p)}} \tag{76,4}$$

gesetzt wurde. Die Intensität des Lichtes im Beobachtungspunkt ist

$$I = \frac{I_0}{\pi} \left| \int_{-w}^\infty \mathrm{e}^{i \eta^2} \mathrm{d}\eta \right|^2 , \tag{76,5}$$

wo I_0 eine Konstante ist, die (wie man weiter sehen wird) mit der Intensität in dem bestrahlten Gebiet übereinstimmt, das von der Schattengrenze hinreichend entfernt ist.

Die Gebiete geometrischen Schattens werden durch negative Werte von w dargestellt. Wir wollen die Form der Funktion $I(w)$ im Schatten für große Werte von $|w|$ darstellen. Durch partielles Integrieren erhalten wir:

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta = -\frac{1}{2i\,|w|}\, e^{i w^2} + \frac{1}{2i}\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\frac{d\eta}{\eta^2}.$$

Eine wiederholte partielle Integration liefert einen Ausdruck, der zu $|w|^3$ umgekehrt proportional ist. Behalten wir nur den Term bei, der mit der Größe $|w|$ am langsamsten abnimmt, so haben wir

$$\int_{|w|}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta \approx -\frac{1}{2i\,|w|}\, e^{i w^2}. \tag{76,6}$$

Auf diese Weise erhalten wir für die Intensität (76,5) für große negative Werte w folgende asymptotische Formel:

$$I = \frac{I_0}{4\pi w^2}. \tag{76,7}$$

Betrachten wir jetzt das bestrahlte Gebiet mit $w > 0$. Wir schreiben:

$$\int_{-w}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta - \int_{-\infty}^{-w} e^{i\eta^2}\, d\eta = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_{w}^{\infty} e^{i\eta^2}\, d\eta.$$

Für hinreichend große Werte von w kann man für das auf der rechten Seite der Gleichung stehende Integral die Näherung (76,6) benutzen. Eine einfache Rechnung ergibt dann

$$I = I_0\left[1 + \frac{1}{w\sqrt{\pi}}\sin\left(w^2 - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{76,8}$$

In dem bestrahlten Gebiet außerhalb der Schattengrenze hat die Intensität also eine unendliche Reihe von Maxima und Minima, so daß das Verhältnis I/I_0 nach beiden Seiten um 1 herum schwankt. Die Amplitude dieser Schwankungen vermindert sich mit wachsendem w, und die Orte der Maxima und Minima nähern sich einander allmählich.

Bei kleinem w besitzt die Funktion $I(w)$ qualitativ denselben Charakter (Abb. 33). Im Gebiet des geometrischen Schattens fällt die Intensität monoton

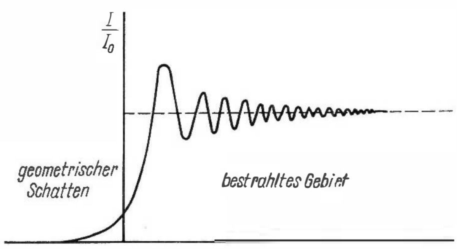


Abb. 33

mit der Entfernung von der Schattengrenze (auf der Grenze selbst ist $I/I_0 = 1/4$). Für positive w besitzt die Intensität aufeinanderfolgende Maxima und Minima. Im ersten und größten Maximum ist $I/I_0 = 1{,}37$.

§ 77. Fraunhofersche Beugung

Für physikalische Anwendungen spielen diejenigen Beugungserscheinungen eine große Rolle, die beim Auffallen eines parallelen Lichtbündels auf einen Schirm entstehen. Als Folge der Beugung geht die Parallelität verloren und es tritt Licht auf, das sich in Richtungen ausbreitet, die von der ursprünglichen Ausbreitungsrichtung verschieden sind. Wir stellen uns die Aufgabe, die Intensitätsverteilung des gestreuten Lichtes in Abhängigkeit von der Richtung in großen Entfernungen hinter dem Schirm zu bestimmen (eine derartige Problemstellung entspricht der sogenannten Fraunhofer*schen Beugung*). Dabei beschränken wir uns wieder auf den Fall kleiner Abweichungen von der geometrischen Optik, d. h., wir nehmen kleine Abweichungen von der ursprünglichen Strahlrichtung (kleine Beugungswinkel) an.[1])

Betrachten wir zum Beispiel die Fraunhofersche Beugung beim senkrechten Auffall einer ebenen Welle auf einen unendlich ausgedehnten Spalt mit parallelen Rändern in einem undurchsichtigen Schirm. Wir wählen die Spaltebene als yz-Ebene mit der z-Achse in Richtung des Spaltes (Abb. 34 zeigt einen Schnitt durch den Schirm, dessen Spaltbreite $2a$ beträgt). Aus Symmetriegründen ist es von vornherein klar, daß das Licht nur in der xy-Ebene abgelenkt wird.

Wir bezeichnen mit u_0 das Feld hinter dem Schirm, das bei strenger Gültigkeit der geometrischen Optik dort vorhanden wäre. Im vorliegenden Falle stellt

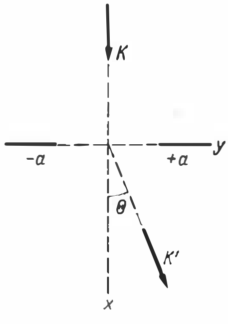


Abb. 34

[1]) Die gestellte Aufgabe könnte mit Hilfe der allgemeinen Gleichung (76,1) gelöst werden, wenn man in ihr zum Grenzfall einer unendlich weit vom Schirm entfernten Lichtquelle und eines unendlich weit gelegenen Beobachtungspunktes übergeht. Kennzeichnend für den betrachteten Fall ist der Umstand, daß (im Gegensatz zur Fresnelschen Beugung) in dem Integral die ganze Wellenfläche S, über die sich die Integration erstreckt, wesentlich ist und nicht nur ein kleiner Teil davon. Es ist jedoch einfacher, die Aufgabe ohne Zuhilfenahme der Gleichung (76,1) neu zu behandeln, wie das weiter unten getan wird.

es sich als ein aus der ebenen Welle herausgeschnittener unendlich ausgedehnter Streifen von der Breite 2a dar. In Wirklichkeit kann jedoch eine Welle mit einer solchen begrenzten Querschnittsfläche nicht streng eben sein (vgl. § 75). In ihrer räumlichen FOURIER-Entwicklung treten Komponenten mit Wellenvektoren verschiedener Richtungen auf, die die Beugung verursachen.

In jeder zur Ebene des Spaltes parallelen Ebene ist das Feld u_0 von Null verschieden und im Bereich $-a < y < a$ konstant. Entwickeln wir dieses Feld im FOURIER-Integral nach der Koordinate y, so erhalten wir für die Komponenten dieser Entwicklung

$$u_q = u_0 \int_{-a}^{a} e^{-iqy}\, dy = \frac{2\,u_0}{q} \sin q\,a\,. \tag{77,1}$$

Bei kleinen Abweichungen von der geometrischen Optik (kleine q-Werte) kann man annehmen, daß die Entwicklungskomponenten des Feldes u_0 mit den Komponenten des wahren Feldes des gebeugten Lichtes zusammenfallen, so daß die Gleichung (77,1) unsere Aufgabe löst.

Ist $\boldsymbol{k}$ der Wellenvektor der auffallenden Welle längs der x-Achse, so entspricht die Komponente u_q des gebeugten Lichtes dem Wellenvektor $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} + \boldsymbol{q}$. Im vorliegenden Falle liegt er in der xy-Ebene und bildet einen kleinen Winkel θ mit der x-Achse, q ist durch die Beziehung $q \approx k\,\theta = \omega\,\theta/c$ gegeben. Die Intensität des in das Intervall dq gestreuten Lichtes ist $|u_q|^2\, dq$ proportional. Verwenden wir u_q aus (77,1), so erhalten wir folgenden Ausdruck für die Winkelverteilung des gebeugten Lichtes:

$$dI = \frac{I_0}{\pi\,a\,k}\, \frac{\sin^2 k\,a\,\theta}{\theta^2}\, d\theta\,. \tag{77,2}$$

Diese Verteilung ist so normiert, daß I_0 die gesamte auf den Spalt fallende Intensität des Lichtes ist[1]). $dI/d\theta$ hat als Funktion des Beugungswinkels θ die in Abb. 35 gezeichnete Gestalt. Bei einer Vergrößerung von θ beiderseits von $\theta = 0$ durchläuft die Intensität eine Reihe von Maxima mit rasch fallender Höhe. Die Maxima sind durch Minima in den Punkten $\theta = \pi\, n/k\, a$ (n eine ganze Zahl) voneinander getrennt, in denen die Intensität zu Null wird.

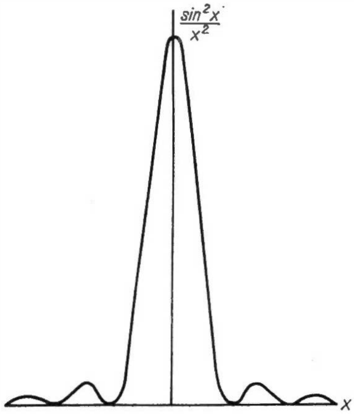
Wir betrachten die FRAUNHOFERsche Beugung an zwei Schirmen, die zueinander komplementär sind: Der erste Schirm habe dort die Öffnung, wo der andere undurchsichtig ist und umgekehrt. In ähnlicher Weise, wie wir es weiter oben getan haben, bezeichnen wir mit $u_0^{(1)}$ und $u_0^{(2)}$ das Feld hinter diesen Schirmen, wie es nach der geometrischen Optik dort vorhanden wäre. Da die Öffnungen beider Schirme einander zu einer vollständigen Fläche ergänzen, stimmt die

[1]) Davon überzeugt man sich leicht mit Hilfe des bekannten Wertes des bestimmten Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \pi\,.$$

Summe $u_0^{(1)} + u_0^{(2)}$ mit der gesamten auffallenden ebenen Welle überein. Diese Welle hat eine ganz bestimmte Ausbreitungsrichtung, und daher ist ihre FOURIER-Komponente $u_q^{(1)} + u_q^{(2)} = 0$ für jedes $q \neq 0$. Daraus folgt für die Intensitäten $|u_q^{(1)}|^2 = |u_q^{(2)}|^2$. Dies bedeutet, daß komplementäre Schirme dieselbe Intensitätsverteilung des gebeugten Lichtes ergeben (dies ist das sogenannte BABINETsche *Prinzip*).

Abb. 35



§ 78. Eigenschwingungen des Feldes

Wir betrachten ein elektromagnetisches Feld, das sich in einem endlichen Raumbereich befindet. Zur Vereinfachung der weiteren Rechnungen nehmen wir an, daß dieses Gebiet die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds mit den Seiten A, C, B hat. Alle Größen, die das Feld in diesem Volumen charakterisieren, lassen sich durch eine dreifache FOURIER-Reihe (entsprechend den drei Koordinaten) darstellen. Wir können diese Entwicklung (etwa für das Vektorpotential) in der Form

$$\boldsymbol{A} = \sum_{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*\, e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}) \tag{78,1}$$

schreiben, die die Realität der $\boldsymbol{A}$ klar zum Ausdruck bringt. Die Summierung erstreckt sich über alle möglichen Werte des Vektors $\boldsymbol{k}$, dessen Komponenten in bekannter Weise die Werte

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{A}, \qquad k_y = \frac{2\pi n_y}{B}, \qquad k_z = \frac{2\pi n_z}{C} \tag{78,2}$$

haben können, wobei n_x, n_y, n_z positive und negative ganze Zahlen sind. Aus der Gleichung $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ ergibt sich für jedes $\boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}} = 0\,, \tag{78,3}$$

d. h., die komplexen Vektoren $\boldsymbol{a_k}$ stehen auf den entsprechenden Wellenvektoren $\boldsymbol{k}$ senkrecht. Die Größen $\boldsymbol{a_k}$ sind Funktionen der Zeit und genügen der Gleichung

$$\ddot{\boldsymbol{a}}_k + c^2 k^2 \boldsymbol{a}_k = 0 . \tag{78,4}$$

Werden die Dimensionen A, B, C des betrachteten Gebietes hinreichend groß gewählt, so liegen die benachbarten Werte von k_x, k_y, k_z (für die n_x, n_y, n_z um Eins verschieden sind) sehr dicht beieinander. Es ist dann sinnvoll, von der Zahl der möglichen Werte k_x, k_y, k_z in einem kleinen Intervall Δk_x, Δk_y, Δk_z zu sprechen.

Da benachbarten Werten von z. B. k_x Werte von n_x entsprechen, die sich um 1 unterscheiden, so ist die Anzahl Δn_x der möglichen Werte von k_x im Intervall Δk_x gleich dem entsprechenden Intervall der n_x-Werte. Wir finden auf diese Weise

$$\Delta n_x = \frac{A}{2\pi} \Delta k_x , \qquad \Delta n_y = \frac{B}{2\pi} \Delta k_y , \qquad \Delta n_z = \frac{C}{2\pi} \Delta k_z .$$

Die Gesamtzahl Δn der möglichen Werte des Vektors $\boldsymbol{k}$, dessen Komponenten in den Intervallen Δk_x, Δk_y, Δk_z liegen, ist gleich dem Produkt $\Delta n_x \Delta n_y \Delta n_z$, d. h., es gilt

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z , \tag{78,5}$$

worin $V = ABC$ das Volumen des betrachteten Feldbereiches ist.

Hieraus bestimmt man leicht die Zahl der möglichen Wellenvektoren, deren Beträge im Intervall Δk und deren Richtungen im Raumwinkelelement Δo liegen. Dazu hat man im „Raum" der k_x, k_y, k_z auf Kugelkoordinaten überzugehen und $\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$ durch das Volumenelement in diesen Koordinaten auszudrücken. Es ergibt sich

$$\Delta n = \frac{V}{(2\pi)^3} k^2 \Delta k \, \Delta o . \tag{78,6}$$

Die Gesamtzahl der möglichen Wellenvektoren mit Beträgen im Intervall Δk und beliebigen Richtungen (wir schreiben 4π anstelle Δo) ist dann schließlich

$$\Delta n = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \Delta k . \tag{78,7}$$

Für die Zeitabhängigkeit der Vektoren $\boldsymbol{a_k}$ ergeben sich einfache periodische Funktionen mit den Frequenzen $\omega_k = c\,k$ (siehe (78,4)). Wir stellen die Entwicklung des Feldes als eine Zerlegung nach fortschreitenden ebenen Wellen dar. Wir setzen die Zeitabhängigkeit für jedes $\boldsymbol{a_k}$ mit einem Faktor $e^{-i\omega_k t}$ an:

$$\boldsymbol{a}_k \sim e^{-i\omega_k t} , \qquad \omega_k = c\,k . \tag{78,8}$$

Jeder einzelne Term in der Summe (78,1) hängt dann nur von der Differenz $\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{r} - \omega_k t$ ab und entspricht einer sich in der $\boldsymbol{k}$-Richtung ausbreitenden Welle.

Wir berechnen nun die Gesamtenergie

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)\,\mathrm{d}V$$

des Feldes im Volumen V in Abhängigkeit von den Größen $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$. Für das elektrische Feld haben wir

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} = -\frac{1}{c}\sum_{\boldsymbol{k}} (\dot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{k}}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} + \dot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{k}}^*\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}})\,,$$

oder, wenn wir (78,8) berücksichtigen,

$$\boldsymbol{E} = i\sum_{\boldsymbol{k}} k\,(\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}})\,. \tag{78,9}$$

Für das Magnetfeld $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ finden wir

$$\boldsymbol{H} = i\sum_{\boldsymbol{k}} ([\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}]\,\mathrm{e}^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}} - [\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*)\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}})\,. \tag{78,10}$$

Bei der Berechnung der Quadrate dieser Summen muß man im Auge behalten, daß Produkte mit verschiedenen Wellenvektoren $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}'$ bei der Integration über den ganzen Bereich Null ergeben. Glieder dieser Art enthalten nämlich den Faktor $\mathrm{e}^{\pm i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{k}'$; ein Integral darüber, etwa

$$\int_0^A \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{A}n_x x}\,\mathrm{d}x\,,$$

verschwindet jedoch für ganze und von Null verschiedene Zahlen n_x. Für die Glieder schließlich, bei denen die Exponentialfaktoren herausfallen, ergibt die Integration über $\mathrm{d}V$ gerade das Volumen V.

Als Resultat finden wir

$$\mathfrak{E} = \frac{V}{4\pi}\sum_{\boldsymbol{k}} \{k^2\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^* + [\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}]\,[\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*]\}\,.$$

Da $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{k} = 0$ ist, folgt

$$[\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}]\,[\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*] = k^2\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*\,,$$

und wir erhalten endgültig

$$\mathfrak{E} = \sum_{\boldsymbol{k}} \mathfrak{E}_{\boldsymbol{k}}\,, \qquad \mathfrak{E}_{\boldsymbol{k}} = \frac{k^2\,V}{2\pi}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}^*\,. \tag{78,11}$$

Die Gesamtenergie des Feldes ist somit die Summe von Energien $\mathfrak{E}_{\boldsymbol{k}}$, die jeweils zu einer einzelnen ebenen Welle gehören.

Entsprechend berechnen wir den Gesamtimpuls des Feldes

$$\frac{1}{c^2}\int \boldsymbol{S}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi c}\int [\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]\,\mathrm{d}V$$

und erhalten

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\boldsymbol{k}}{k}\,\frac{\mathfrak{E}_{\boldsymbol{k}}}{c}\,. \tag{78,12}$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, da uns die Beziehung zwischen Energie und Impuls ebener Wellen bekannt ist (siehe § 69).

Die Einführung der Entwicklung (78,1) bedeutet eine Beschreibung des Feldes durch eine diskrete Reihe von Veränderlichen (den Vektoren $\boldsymbol{a}_k$) anstelle von stetig veränderlichen Größen wie bei Benutzung der in allen Punkten des Raumes gegebenen Potentiale $\boldsymbol{A}(x, y, z, t)$. Wir führen nun eine Transformation der Veränderlichen $\boldsymbol{a}_k$ durch, die es uns ermöglicht, den Feldgleichungen eine den kanonischen Gleichungen der Mechanik (den HAMILTONschen Gleichungen) entsprechende Gestalt zu geben.

Die reellen „kanonischen Variablen" $\boldsymbol{Q}_k$ und $\boldsymbol{P}_k$ seien durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_k &= \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_k^*)\,, \\ \boldsymbol{P}_k &= -\,i\,\omega_k\sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}_k^*) = \dot{\boldsymbol{Q}}_k \end{aligned}\right\} \tag{78,13}$$

definiert.

Die HAMILTON-Funktion des Feldes erhalten wir, wenn wir im Energieausdruck (78,11) die Größen $\boldsymbol{a}_k$ durch $\boldsymbol{P}_k$ und $\boldsymbol{Q}_k$ ersetzen:

$$\mathfrak{H} = \sum_k \mathfrak{H}_k = \sum_k \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{P}_k^2 + \omega_k^2\,\boldsymbol{Q}_k^2)\,. \tag{78,14}$$

Die HAMILTONschen Gleichungen $\partial\mathfrak{H}/\partial\boldsymbol{P}_k = \dot{\boldsymbol{Q}}_k$ fallen mit den Gleichungen $\boldsymbol{P}_k = \dot{\boldsymbol{Q}}_k$ zusammen, die sich so in der Tat als Folge der Bewegungsgleichung erweisen (dies wurde durch geeignete Wahl des Koeffizienten bei der Transformation (78,13) erreicht). Die Gleichungen $\partial\mathfrak{H}/\partial\boldsymbol{Q}_k = -\,\dot{\boldsymbol{P}}_k$ führen zu den Gleichungen

$$\ddot{\boldsymbol{Q}}_k + \omega_k^2\,\boldsymbol{Q}_k = 0\,, \tag{78,15}$$

d. h., sie sind identisch mit den Feldgleichungen.

Jeder der Vektoren $\boldsymbol{Q}_k$ und $\boldsymbol{P}_k$ steht auf dem Wellenvektor $\boldsymbol{k}$ senkrecht, besitzt also zwei unabhängige Komponenten. Die Richtung dieser Vektoren ergibt die Polarisationsrichtung der Welle. Bezeichnen wir die beiden Komponenten von $\boldsymbol{Q}_k$ in der zu $\boldsymbol{k}$ senkrechten Ebene mit Q_{kj}, $j = 1, 2$, so haben wir $\boldsymbol{Q}_k^2 = \sum_j Q_{kj}^2$. Eine entsprechende Beziehung gilt für $\boldsymbol{P}_k$. Damit folgt dann

$$\mathfrak{H} = \sum_{kj} \mathfrak{H}_{kj}\,, \qquad \mathfrak{H}_{kj} = \tfrac{1}{2}(P_{kj}^2 + \omega_k^2\,Q_{kj}^2)\,. \tag{78,16}$$

Wir sehen, daß die HAMILTON-Funktion in eine Reihe unabhängiger Terme zerfällt, von denen jeder nur ein Größenpaar Q_{kj}, P_{kj} enthält. Jeder Term entspricht einer fortschreitenden Welle mit bestimmtem Wellenvektor und bestimmter Polarisation. $\mathfrak{H}_{kj}$ hat dabei die Gestalt der HAMILTON-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Die erhaltene Entwicklung des Feldes läßt sich somit als eine Zerlegung des Feldes in eine Reihe harmonischer Oszillatoren deuten.

Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen XIV

§ 79. Retardierte Potentiale

Wir werden Gleichungen zur Bestimmung des Potentialfeldes ableiten, das durch bewegte Ladungen verursacht ist. Zu diesem Zweck wiederholen wir die in § 68 durchgeführte Ableitung, jedoch ohne die Festsetzung, daß die Dichte der Ladungen und der Strom verschwinden.

Setzen wir

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\,, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{79,1}$$

in die Gleichung

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

ein, so erhalten wir

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = -\Delta \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{1}{c} \tag{79,2}$$

(im letzten Glied von rechts sind die Operationen grad und $\partial/\partial t$ vertauscht).

Als zusätzliche Bedingung für die Potentiale wählen wir jetzt die Gleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\,; \tag{79,3}$$

sie wird Lorentz-Bedingung genannt, und die ihr genügenden Potentiale nennt man Potentiale gemäß der Lorentz-*Konvention* geeicht.[1]) Die letzten Glieder auf beiden Seiten von (79,2) heben sich dann wechselseitig auf, und wir kommen zu der Gleichung

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\,. \tag{79,4}$$

[1]) Die Bedingung (79,3) ist allgemeiner als die im § 68 verwendete Bedingung $\varphi = 0$, $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$; Potentiale, die der letzteren genügen, genügen auch der Bedingung (79,3). Im Unterschied zu ihr hat die Lorentz-Bedingung jedoch invarianten Charakter: Potentiale, die dieser Bedingung in einem Bezugssystem genügen, genügen ihr auch in allen anderen Systemen. Dies wird daraus ersichtlich, daß die Bedingung (79,3) in der vierdimensionalen invarianten Form

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

geschrieben werden kann.

Setzen wir analog (79,1) in die Gleichung div $\boldsymbol{E} = 4\pi\varrho$ ein, so erhalten wir

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \Delta\varphi = 4\pi\varrho\,,$$

oder, wenn wir div $\boldsymbol{A}$ aus der Bedingung (79,3) verwenden,

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho\,. \tag{79,5}$$

Die Gleichungen (79,4) und (79,5) sind die gesuchten Gleichungen. Für ein zeitunabhängiges Feld ergeben sich die uns schon bekannten Gleichungen (59,4) und (65,4) und für ein veränderliches Feld ohne Ladungen homogene Wellengleichungen.

Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Gleichungen (79,4) und (79,5) läßt sich in bekannter Weise als Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung (also ohne rechte Seiten) und einer speziellen Lösung der allgemeinen Gleichung (mit Inhomogenitäten) darstellen. Um ein solches spezielles Integral zu finden, teilen wir den ganzen Raum in unendlich kleine Bereiche und bestimmen das von der Ladung erzeugte Feld, die sich in einem dieser Volumenelemente befindet. Infolge der Linearität der Feldgleichungen ist das tatsächliche Feld gleich der Summe der von allen diesen Elementen hervorgerufenen Felder.

Die Ladungsmenge de in einem bestimmten Volumenelement hängt im allgemeinen von der Zeit ab. Wählen wir den Koordinatenursprung im Volumenelement, so läßt sich die Ladungsdichte $\varrho = de(t)\,\delta(\boldsymbol{R})$ schreiben, wo $\boldsymbol{R}$ die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt ist. Es ist also die Gleichung

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\,de(t)\,\delta(\boldsymbol{R}) \tag{79,6}$$

zu lösen.

Überall außerhalb des Ursprunges ist $\delta(\boldsymbol{R}) = 0$, und es gilt

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0\,. \tag{79,7}$$

Offensichtlich muß in dem hier betrachteten Fall φ kugelsymmetrisch sein, d. h. darf nur von R abhängen. Schreiben wir also den LAPLACE-Operator in Kugelkoordinaten, so nimmt (79,7) die Gestalt

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0$$

an.

Zur Lösung substituieren wir $\varphi = \frac{\chi(R,t)}{R}$. Dann erhalten wir für χ

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = 0\,.$$

Dies ist jedoch die Gleichung ebener Wellen, deren Lösung die Gestalt

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right)$$

hat.

Da wir nur eine spezielle Lösung suchen, genügt es, nur eine der Funktionen f_1 und f_2 zu benutzen. Es ist gewöhnlich günstig, $f_2 = 0$ zu setzen (vgl. dazu das weiter unten gesagte). Außerhalb des Koordinatenursprunges hat also das Potential φ immer die Gestalt

$$\varphi = \frac{\chi\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}. \tag{79,8}$$

Die Funktion χ ist hierbei vorläufig noch willkürlich; wir wählen sie so, daß sich auch im Koordinatenursprung der richtige Wert des Potentials ergibt. Mit anderen Worten haben wir χ so zu bestimmen, daß im Koordinatenursprung die Gleichung (79,6) erfüllt wird. Dies ist durch die Feststellung leicht möglich, daß für $R \to 0$ das Potential selbst unendlich groß wird und daher die Ableitungen nach den Koordinaten rascher wachsen als diejenigen nach der Zeit. Für $R \to 0$ kann man also in der Gleichung (79,6) den Term $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ gegenüber $\Delta\varphi$ vernachlässigen. Dann geht (79,6) in die uns schon bekannte Gleichung (59,10) über, die das COULOMBsche Gesetz ergab. In der Nähe des Koordinatenursprunges muß somit (79,8) in das COULOMBsche Gesetz übergehen, woraus folgt, daß $\chi(t) = \mathrm{d}e(t)$, d. h.

$$\varphi = \frac{\mathrm{d}e\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R}$$

gilt.

Es ist nun leicht, die Lösung der Gleichung (79,5) für eine beliebige Ladungsverteilung $\varrho(x, y, z, t)$ zu erhalten. Dazu genügt es, in (79,9) $\mathrm{d}e = \varrho\,\mathrm{d}V$ (mit $\mathrm{d}V$ als Volumenelement) zu schreiben und über den ganzen Raum zu integrieren. Zu der so erhaltenen Lösung der inhomogenen Gleichung (79,5) ist noch die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung hinzuzufügen. Die allgemeine Lösung hat dann die Gestalt

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \int \frac{1}{R}\,\varrho\left(\boldsymbol{r}', t - \frac{R}{c}\right)\mathrm{d}V' + \varphi_0\,,$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\,, \quad \mathrm{d}V' = \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'\,, \tag{79,9}$$

(R ist die Entfernung vom Volumenelement $\mathrm{d}V'$ zum „Beobachtungspunkt", in dem die Werte des Potentials gesucht werden, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ und $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$). Wir werden diesen Ausdruck kurz in der Form

$$\varphi = \int \frac{\varrho_{t-R/c}}{R}\,\mathrm{d}V + \varphi_0 \tag{79,10}$$

schreiben, wo der Index $t - R/c$ bedeuten soll, daß der Wert von ϱ zum Zeitpunkt $t - R/c$ zu nehmen ist; den Strich bei $\mathrm{d}V$ lassen wir fort.

Für das Vektorpotential gilt ganz entsprechend

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}_{t-R/c}}{R}\,\mathrm{d}V + \boldsymbol{A}_0\,. \tag{79,11}$$

$\boldsymbol{A}_0$ ist eine Lösung der Gleichung (79,4) ohne rechte Seite.

Die Ausdrücke (79,10) und (79,11) (ohne φ_0 und $\boldsymbol{A}_0$) werden *retardierte Potentiale* genannt.

Für unbewegte Ladungen (d. h. für eine zeitunabhängige Dichte ϱ) geht (79,10) in die uns schon bekannte Gleichung (59,9) für das Potential des elektrostatischen Feldes über. (79,11) ergibt bei einer stationären Bewegung der Ladungen (nach Mittelung) die Gleichung (65,5) für das Vektorpotential eines magnetostatischen Feldes.

$\boldsymbol{A}_0$ und φ_0 in (79,10) und (79,11) sind so zu bestimmen, daß sie den Bedingungen der gestellten Aufgabe genügen. Es würde zur Festlegung offenbar ausreichen, Anfangsbedingungen zu stellen, d. h. das Feld zu einem Anfangszeitpunkt vorzugeben. Gewöhnlich hat man es jedoch nicht mit derartigen Anfangsbedingungen zu tun. Statt dessen sind Bedingungen in großen Entfernungen vom System der Ladungen für alle t gegeben. Auf das System treffe etwa eine äußere Strahlung auf. Dann kann sich das Feld, das als Ergebnis der Wechselwirkung der äußeren Strahlung mit dem System entsteht, vom äußeren Feld nur durch die vom System ausgehende Strahlung unterscheiden. Eine solche Ausstrahlung des Systems hat in großen Entfernungen die Gestalt von Wellen, die sich in Richtung wachsender R vom System fortbewegen. Diese Bedingung erfüllen jedoch gerade die retardierten Potentiale. Sie bilden also das vom System ausgehende Feld und φ_0, $\boldsymbol{A}_0$ sind mit dem auf das System wirkenden äußeren Feld zu identifizieren.

§ 80. Die Lienard-Wiechertschen Potentiale

Wir wollen die Potentiale eines Feldes, das von einer Punktladung, die eine vorgegebene Bewegung auf der Trajektorie $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0(t)$ vollführt, berechnen.

Gemäß den Formeln für retardierte Potentiale wird das Feld im Beobachtungspunkt $P(x, y, z)$ und zum Zeitpunkt t durch den Bewegungszustand der Ladung zu dem vorhergehenden Zeitpunkt t' bestimmt, für den die Ausbreitungszeit des Lichtsignales vom Punkt $\boldsymbol{r}_0(t')$, in dem sich die Ladung befindet, zum Beobachtungspunkt P gerade mit der Differenz $t - t'$ zusammenfällt. $\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)$ sei der Radiusvektor der Ladung e im Punkt P. Zusammen mit $\boldsymbol{r}_0(t)$ ist er eine vorgegebene Funktion der Zeit. Der Zeitpunkt t' wird dann durch die Gleichung

$$t' + \frac{R(t')}{c} = t \tag{80,1}$$

bestimmt.

In dem Bezugssystem, in dem zum Zeitpunkt t' das Teilchen ruht, ist das Feld im Beobachtungspunkt zum Zeitpunkt t durch das Coulombsche Poten-

tial gegeben:

$$\varphi = \frac{e}{R(t')}, \qquad \boldsymbol{A} = 0\,. \tag{80,2}$$

Der Ausdruck für die Potentiale in einem beliebigen Bezugssystem ergibt sich daraus, daß wir einen solchen Vierervektor angeben, der für die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = 0$ für φ mit $\boldsymbol{A}$ gerade die Werte (80,2) ergibt. Da gemäß (80,1) φ aus (80,2) in der Form

$$\varphi = \frac{e}{c\,(t - t')}$$

geschrieben werden kann, finden wir für den gesuchten Vierervektor

$$A^\mu = e\frac{u^\mu}{(R_\nu\ u^\nu)}\,. \tag{80,3}$$

Hier ist u^μ die Vierergeschwindigkeit der Ladung und R^ν ein Vierervektor mit den Komponenten

$$R^\nu = \left(c\,(t - t')\,, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right),$$

wobei t', x', y', z' untereinander durch die Beziehung (80,1) verknüpft sind. Diese hat invarianten Charakter, da sie in der invarianten Form

$$R_\nu\, R^\nu = 0 \tag{80,4}$$

geschrieben werden kann. Wenn wir die Komponenten des Vierervektors (80,3) in dreidimensionaler Form für ein beliebiges Bezugssystem aufschreiben, erhalten wir für die Potentiale des Feldes, das durch eine sich beliebig bewegende Punktladung erzeugt wird, folgende Ausdrücke:

$$\varphi = \frac{e}{\left(R - \dfrac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{R}}{c}\right)}, \qquad \boldsymbol{A} = \frac{e\,\boldsymbol{v}}{c\left(R - \dfrac{\boldsymbol{v}\boldsymbol{R}}{c}\right)}\,. \tag{80,5}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{R}$ der Radiusvektor vom Aufenthaltspunkt der Ladung zum Beobachtungspunkt P und alle Größen auf den rechten Seiten der Gleichungen sind zum Zeitpunkt t', der durch (80,1) definiert ist, zu nehmen. Die Potentiale des Feldes in der Form (80,5) heißen LIÉNARD-WIECHERT-Potentiale.

Zur Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldstärke nach den Formeln

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\,, \qquad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$$

sind φ und $\boldsymbol{A}$ nach den Aufpunktkoordinaten x, y, z und der Beobachtungszeit t zu differenzieren. Die Gleichungen (80,5) drücken die Potentiale als Funktionen von t' und erst über (80,1) als implizite Funktionen von x, y, z, t aus. Zur Bildung der nötigen Ableitungen hat man also erst nach t' zu differenzieren.

Differenzieren wir die Gleichung $R(t') = c(t - t')$ einmal nach t und ein weiteres Mal nach r, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right), \\ \operatorname{grad} R &\equiv \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t' + \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}} = - c \operatorname{grad} t' . \end{aligned}\right\} \qquad (80{,}6)$$

Die Ableitung $\partial R/\partial t'$ erhalten wir durch Differenzieren der Identität $R^2 = \boldsymbol{R}^2$ und durch die Substitution von $\partial \boldsymbol{R}/\partial t' = -\boldsymbol{v}(t')$ (das Minuszeichen ist hier die Folge des Umstandes, daß der Radiusvektor $\boldsymbol{R}$ von der Ladung e zum Punkt P gerichtet ist; die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Koordinaten der Ladung). Hieraus erhalten wir:

$$\frac{\partial R}{\partial t'} = -\frac{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{v}}{R}, \qquad \text{ferner ist} \qquad \frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}.$$

Setzen wir diese Ergebnisse in die Gleichung (80,6) ein, so finden wir:

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{R}}{c\,R}}, \qquad \operatorname{grad} t' = -\frac{\boldsymbol{R}}{c\left(R - \frac{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{v}}{c}\right)}. \qquad (80{,}7)$$

Man kann leicht mit diesen Gleichungen die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ berechnen. Nach Zwischenrechnungen, die wir fortlassen, gelangt man zu dem Ergebnis

$$\boldsymbol{E} = e\,\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R - \frac{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{v}}{c}\right)^3}\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R - \frac{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{v}}{c}\right)^3}\left[\boldsymbol{R}\left[\left(\boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}R\right)\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\right]\right], \qquad (80{,}8)$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{R}[\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{E}]. \qquad (80{,}9)$$

Hierbei wurde $\dot{\boldsymbol{v}} = \partial \boldsymbol{v}/\partial t'$ gesetzt; alle Größen auf den rechten Seiten sind zum Zeitpunkt t' zu nehmen. Das Magnetfeld steht bemerkenswerterweise immer senkrecht auf dem elektrischen.

Das elektrische Feld (80,8) setzt sich aus zwei Bestandteilen mit verschiedenem Verhalten zusammen. Der erste Term hängt nur von der Geschwindigkeit des Teilchens ab (nicht von seiner Beschleunigung) und ändert sich in großen Entfernungen wie $1/R^2$. Der zweite, beschleunigungsabhängige Term verhält sich für große R wie $1/R$. Wir werden später sehen, daß dieses letzte Glied mit der Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen durch das Teilchen zusammenhängt.

Der erste Term sollte, da er beschleunigungsunabhängig ist, dem Felde einer gleichförmig bewegten Ladung entsprechen. Tatsächlich kann man zeigen (wir werden hier nicht darauf eingehen), daß das durch diesen Term bestimmte Feld mit dem Feld von (61,5) identisch ist.

§ 81. Das Feld eines Systems von Ladungen in großen Entfernungen

Wir betrachten das Feld, das von einem System bewegter Ladungen in Entfernungen hervorgerufen wird. die groß im Vergleich zum Durchmesser des Systems sind.

Den Koordinatenanfangspunkt O wählen wir an einer beliebigen Stelle innerhalb der Ladungen. Den Radiusvektor von O zum Beobachtungspunkt P bezeichnen wir mit $\boldsymbol{R}_0$, den Einheitsvektor in dieser Richtung mit $\boldsymbol{n}$. Der Radiusvektor des Ladungselementes $de = \varrho\, dV$ sei $\boldsymbol{r}$, den von de nach P gerichteten Vektor nennen wir $\boldsymbol{R}$; offensichtlich ist $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}$.

In großen Entfernungen vom System ist $R_0 \gg r$ und näherungsweise

$$R = |\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}| \approx R_0 - \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{r}\,.$$

Wir setzen dies in die Gleichungen (79,10), (79,11) für die retardierten Potentiale ein. Im Nenner des Integranden kann man $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n}$ gegenüber R_0 vernachlässigen. Im Argument $t - R/c$ ist jedoch diese Vernachlässigung im allgemeinen nicht erlaubt; die Möglichkeit einer solchen Vereinfachung ergibt sich hier nicht aus der relativen Größe von R_0/c und $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n}/c$, sondern bestimmt sich daraus, wie rasch sich ϱ und $\boldsymbol{j}$ während der Zeit $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n}/c$ ändern. Berücksichtigen wir, daß bei der Integration R_0 konstant ist und daher aus dem Integral gezogen werden kann, so finden wir für die Potentiale des Feldes in großen Entfernungen von den Ladungen folgende Ausdrücke:

$$\varphi = \frac{1}{R_0}\int \varrho_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{c}}\, dV\,, \tag{81,1}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c\,R_0}\int \boldsymbol{j}_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{c}}\, dV\,. \tag{81,2}$$

In genügend großen Entfernungen vom System kann das Feld in kleinen Raumbereichen als ebene Welle betrachtet werden. Dazu ist nötig, daß die Entfernungen nicht nur in bezug auf den Durchmesser des Systems, sondern auch im Vergleich zu der Länge der vom System ausgestrahlten elektromagnetischen Wellen groß sind. Dieser Feldbereich wird als *Wellenzone* der Strahlung bezeichnet.

In einer ebenen Welle sind die Felder $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ durch die Beziehung (69,4) $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{n}]$ verknüpft. Da $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ gilt, genügt schon zur vollständigen Bestimmung des Feldes in der Wellenzone die Berechnung des Vektorpotentials. Für eine ebene Welle haben wir $\boldsymbol{H} = [\dot{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{n}]/c$ [Gleichung (69,3)], wo der Punkt über $\boldsymbol{A}$ die Ableitung nach der Zeit bedeutet. Bei bekanntem $\boldsymbol{A}$ finden wir also $\boldsymbol{H}$ und $\boldsymbol{E}$ nach den Formeln[1])

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}[\dot{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{n}]\,, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{1}{c}[[\dot{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{n}]\,\boldsymbol{n}]\,. \tag{81,3}$$

[1]) Die Gleichung $\boldsymbol{E} - \dot{\boldsymbol{A}}/c$ [siehe (69,3)] ist hier nicht anwendbar, da die Potentiale φ, $\boldsymbol{A}$ hier nicht die Zusatzbedingung erfüllen, die wir in § 69 für sie forderten.

Es sei darauf hingewiesen, daß das Feld in großen Entfernungen der ersten Potenz der Entfernung R_0 vom ausstrahlenden System umgekehrt proportional ist. Es ist ferner zu bemerken, daß die Zeit in die Ausdrücke (81,1) bis (81,3) immer in der Kombination $t - R_0/c$ mit der Entfernung R_0 eingeht.

Die vom System ausgestrahlten elektromagnetischen Wellen führen eine bestimmte Energie mit sich. Der Energiestrom wird durch den POYNTING-Vektor gegeben, der in einer ebenen Welle gleich

$$\boldsymbol{S} = c \frac{H^2}{4\pi} \boldsymbol{n}$$

ist. Die Intensität $\mathrm{d}I$ der Strahlung im Raumwinkelelement $\mathrm{d}o$ ist diejenige Energiemenge, die in der Zeiteinheit durch das Element $\mathrm{d}f = R_0^2\, \mathrm{d}o$ der Kugeloberfläche gelangt, deren Zentrum im Koordinatenanfangspunkt liegt und die einen Radius R_0 besitzt. Offensichtlich ist diese Menge gleich dem mit $\mathrm{d}f$ multiplizierten Energiestrom S, d. h.

$$\mathrm{d}I = c \frac{H^2}{4\pi} R_0^2\, \mathrm{d}o\,. \tag{81,4}$$

Da die Feldstärke H umgekehrt proportional zu R_0 ist, sehen wir, daß die vom System pro Zeiteinheit in den Raumwinkel $\mathrm{d}o$ abgestrahlte Energie für alle Entfernungen dieselbe ist (bei einem für alle Entfernungen gleichen Wert der Differenz $t - R_0/c$). Dies muß natürlich so sein, da sich die vom System ausgesandte Energie im umliegenden Raum mit der Geschwindigkeit c ausbreitet und sich nirgends anhäufen oder verschiwnden kann.

§ 82. Dipolstrahlung

Die im Integranden der Ausdrücke (81,1) und (81,2) für die retardierten Potentiale auftretende Zeit $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n}/c$ kann man vernachlässigen, wenn sich innerhalb dieser Zeit die Ladungsverteilung wenig ändert. Es lassen sich leicht Bedingungen dafür angeben. T sei der Größenordnung nach die Zeit, in der sich die Ladungsverteilung des Systems merklich ändert. Die Strahlung dieses Systems wird offensichtlich eine Periode der Ordnung T, d. h. eine Frequenz der Größenordnung $1/T$ besitzen. Bezeichnen wir ferner mit a die Größenordnung der Systemdurchmesser. Dann ist $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n}/c \sim a/c$. Damit sich die Ladungsverteilung des Systems in dieser Zeit $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n}/c$ nicht bedeutend ändern kann, muß $a/c \ll T$ sein. Nun ist $c\,T$ nichts anderes als die Wellenlänge λ der Strahlung, so daß wir die Bedingung $a \ll c\,T$ in der Form

$$a \ll \lambda \tag{82,1}$$

schreiben können, d. h., die Systemdurchmesser müssen klein gegenüber der Länge der ausgestrahlten Wellen sein.

Die Bedingung läßt sich noch in einer anderen Form schreiben, wenn wir $T \sim a/v$ und daher $\lambda \sim c\,a/v$ benutzen, wo v die Größenordnung der Geschwin-

digkeiten der Ladungen ist. Aus $a \ll \lambda$ ergibt sich dann

$$v \ll c\,, \tag{82,2}$$

d. h., die Geschwindigkeiten der Ladungen müssen klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sein.

Wir setzen voraus, daß diese Bedingung erfüllt ist und wollen nun die Ausstrahlung in Entfernungen vom System betrachten, die groß im Vergleich zu den Wellenlängen sind (und daher auf jeden Fall auch groß gegenüber den Systemdimensionen). Wie schon im § 81 gesagt wurde, kann man in solchen Entfernungen das Feld als ebene Welle betrachten, so daß es für seine Bestimmung ausreicht, nur das Vektorpotential zu berechnen.

Das Vektorpotential (81,2) hat hier die Gestalt

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c\,R_0}\int \boldsymbol{j}_{t'}\,\mathrm{d}V\,, \tag{82,3}$$

wobei die Zeit $t' = t - R_0/c$ nicht mehr von den Integrationsveränderlichen abhängt. Wir setzen $\boldsymbol{j} = \varrho\,\boldsymbol{v}$ und schreiben (82,3) in der Gestalt

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c\,R_0}\left(\sum e\,\boldsymbol{v}\right),$$

wo sich die Summierung über alle Ladungen des Systems erstreckt. Zur Abkürzung lassen wir den Index t' fort; alle Größen auf den rechten Seiten der Gleichungen sind zum Zeitpunkt t' zu nehmen. Nun gilt

$$\sum e\,\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum e\,\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{d}}\,,$$

wo $\boldsymbol{d}$ das Dipolmoment des Systems ist. Wir haben somit

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c\,R_0}\dot{\boldsymbol{d}}\,. \tag{82,4}$$

Mit Hilfe von (81,3) finden wir das Magnetfeld zu

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c^2 R_0}[\ddot{\boldsymbol{d}}\,\boldsymbol{n}]\,, \tag{82,5}$$

sowie das elektrische Feld

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2 R_0}[[\ddot{\boldsymbol{d}}\,\boldsymbol{n}]\,\boldsymbol{n}]\,. \tag{82,6}$$

In der betrachteten Näherung ist also die Ausstrahlung durch die zweiten Ableitungen des Dipolmomentes des Systems bestimmt. Eine solche Strahlung wird als *Dipolstrahlung* bezeichnet.

Aus $\boldsymbol{d} = \sum e\,\boldsymbol{r}$ folgt $\ddot{\boldsymbol{d}} = \sum e\,\dot{\boldsymbol{v}}$. Die Ladungen können also nur dann strahlen, wenn sie sich beschleunigt bewegen. Sich gleichförmig bewegende Ladungen

senden keine Strahlung aus. Dies folgt im übrigen auch unmittelbar aus dem Relativitätsprinzip, da man eine gleichförmig bewegte Ladung in dem Inertialsystem betrachten kann, in dem sie ruht; eine ruhende Ladung strahlt aber nicht.

Setzen wir (82,5) in (79,4) ein, so erhalten wir für die Intensität der Dipolstrahlung

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\boldsymbol{d}}\boldsymbol{n}]^2 \,\mathrm{d}o = \frac{\ddot{\boldsymbol{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta \,\mathrm{d}o\,, \tag{82,7}$$

wo θ der Winkel zwischen den Vektoren $\ddot{\boldsymbol{d}}$ und $\boldsymbol{n}$ ist. $\mathrm{d}I$ ist diejenige Energiemenge, die vom System in der Zeiteinheit in das Raumwinkelelement $\mathrm{d}o$ gestrahlt wird; die Richtungsverteilung der Strahlung wird somit durch den Faktor $\sin^2\theta$ gegeben.

Mit $\mathrm{d}o = 2\pi \sin\theta \, d\theta$ erhalten wir nach Integration über θ von 0 bis π als gesamte Ausstrahlung

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\boldsymbol{d}}^2\,. \tag{82,8}$$

Ist nur eine sich in einem äußeren Feld bewegende Ladung vorhanden, so folgt $\boldsymbol{d} = e\,\boldsymbol{r}$ und $\ddot{\boldsymbol{d}} = e\,\boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{w}$ als Beschleunigung der Ladung. Die Gesamtausstrahlung einer bewegten Ladung ist daher

$$I = \frac{2e^2w^2}{3c^3}\,. \tag{82,9}$$

Die vom System hervorgebrachte Strahlung kann spektral zerlegt werden. Offensichlich sind für das Hervorbringen bestimmter monochromatischer Strahlungskomponenten ebensolche Komponenten des Dipolmoments des Systems $\boldsymbol{d}(t)$ verantwortlich. Dabei muß man die Fälle der Zerlegung in eine Reihe oder in ein Fourier-Integral unterscheiden.

Wenn die Ladungen periodische Schwingungen (mit Frequenzen ω_0) ausführen, muß man das Dipolmoment (und mit ihm auch die Strahlung des Feldes) in eine Fourier-Reihe zerlegen. Nach der allgemeinen Formel (72,4) erhält man die Intensität der monochromatischen Komponente (mit der Frequenz $\omega = n\,\omega_0$) aus der Formel für die mittlere Intensität der Strahlung

$$I = \frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{\boldsymbol{d}}^2} \tag{82,10}$$

indem man das gemittelte Quadrat $\overline{\ddot{\boldsymbol{d}}^2}$ durch das doppelte Quadrat des Moduls der entsprechenden Fourier-Komponente $\ddot{\boldsymbol{d}}_\omega$ ersetzt:

$$I_\omega = \frac{4}{3c^2}|\ddot{\boldsymbol{d}}_\omega|^2\,.$$

Die Fourier-Komponente des Vektors $\ddot{\boldsymbol{d}}(t)$ läßt sich durch die Fourier-Komponente des Vektors $\boldsymbol{d}(t)$ ausdrücken. Wir erinnern daran, daß sich jeder Term

des Ausdruckes $\ddot{\boldsymbol{d}}(t)$ aus der zeitlichen Ableitung des entsprechenden Terms des Ausdruckes $\boldsymbol{d}(t)$ ergeben muß, d. h., es ist

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_\omega \, \mathrm{e}^{-i\omega t} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} (\boldsymbol{d}_\omega \, \mathrm{e}^{-i\omega t}) = -\,\omega^2 \, \boldsymbol{d}_\omega \, \mathrm{e}^{-i\omega t} \, .$$

Hieraus folgt

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_\omega = -\,\omega^2 \, \boldsymbol{d}_\omega \qquad (82{,}11)$$

und

$$I_\omega = \frac{4\,\omega^4}{3\,c^3} \, |\boldsymbol{d}_\omega|^2 \, . \qquad (82{,}12)$$

Mit einer Entwicklung in ein FOURIER-Integral hat man es bei der Strahlung zu tun, die beim Zusammenstoß geladener Teilchen entsteht (die sogenannte *Bremsstrahlung*). Dabei ist von Interesse die gesamte Energiemenge, die während der Stoßdauer ausgestrahlt wurde. Die Energie, die in Form von Wellen mit Frequenzen im Intervall zwischen ω und $\omega + \mathrm{d}\omega$ ausgestrahlt wird, bezeichnen wir mit $\mathrm{d}\mathfrak{E}_\omega$. Wir erhalten sie nach (72,8) aus der Formel für die Gesamtenergie der Strahlung:

$$\Delta\mathfrak{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I \, \mathrm{d}t = \frac{2}{3\,c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\boldsymbol{d}}^2 \, \mathrm{d}t \, , \qquad (82{,}13)$$

indem wir das Integral durch den Ausdruck $2\,|\ddot{\boldsymbol{d}}_\omega|^2 \, \mathrm{d}\omega/2\,\pi$ ersetzen:

$$\mathrm{d}\mathfrak{E}_\omega = \frac{2}{3\,\pi\,c^3} \, |\ddot{\boldsymbol{d}}_\omega|^2 \, \mathrm{d}\omega \, . \qquad (82{,}14)$$

Ein abgeschlossenes System, das aus Teilchen besteht, bei denen das Verhältnis Ladung zu Masse gleich ist, kann keine (Dipol-)Strahlung aussenden. In der Tat ist das Dipolmoment eines solchen Systems

$$\boldsymbol{d} = \sum e\,\boldsymbol{r} = \sum \frac{e}{m} \, m\,\boldsymbol{r} = \mathrm{const} \sum m\,\boldsymbol{r} \, ,$$

wo const das (für alle Teilchen gleiche) Verhältnis Ladung zu Masse bedeutet. Nun gilt $\sum m\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} \sum m$, mit $\boldsymbol{R}$ als Radiusvektor des Systemschwerpunktes (es sei daran erinnert, daß für alle Geschwindigkeiten $v \ll c$ gilt, so daß die nichtrelativistische Mechanik anwendbar ist); $\ddot{\boldsymbol{d}}$ ist daher der Beschleunigung des Schwerpunktes proportional und verschwindet, da sich der Schwerpunkt gleichförmig bewegt.

Wenn die Dipolstrahlung fehlt, muß man sich zur Bestimmung der vom System ausgestrahlten Energie höheren Termen der Entwicklung des Feldpotentials nach Potenzen eines kleinen Verhältnisses a/λ zuwenden. In den nach der Dipolnäherung folgenden Näherungen entsteht eine Strahlung, die sich als Schwingung des elektrischen Quadrupolmoments und des magnetischen Moments des Systems erweist.

Aufgaben[1]

1. Man bestimme die Ausstrahlung eines Dipols $\boldsymbol{d}$, der in einer Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotiert.

Lösung. Wählen wir die xy-Ebene als Rotationsebene, so haben wir

$$d_x = d_0 \cos \Omega\, t, \qquad d_y = d_0 \sin \Omega\, t\,.$$

Da diese Funktionen „monochromatisch" sind, ist auch die Ausstrahlung mit der Frequenz $\omega = \Omega$ monochromatisch. Nach (82,7) finden wir für die Winkelverteilung der (über die Rotationsperiode) gemittelten Ausstrahlung

$$\overline{\mathrm{d}I} = \frac{d_0^2\, \Omega^4}{8\,\pi\, c^3}\,(1 + \cos^2 \vartheta)\, \mathrm{d}o\,,$$

wo ϑ der Winkel zwischen der Richtung $\boldsymbol{n}$ der Strahlung und der z-Achse ist. Die Gesamtintensität ist

$$\bar{I} = \frac{2\, d_0^2\, \Omega^4}{3\, c^3}\,.$$

2. Man bestimme die Gesamtstrahlung bei frontalem Zusammenstoß zweier sich abstoßender Teilchen.

Lösung. Wenn wir den Koordinatenursprung im Schwerpunkt der Teilchen wählen, so erhalten wir für das Dipolmoment des Systems

$$\boldsymbol{d} = e_1\, \boldsymbol{r}_1 + e_2\, \boldsymbol{r}_2 = \frac{e_1\, m_2 - e_2\, m_1}{m_1 + m_2}\, \boldsymbol{r} = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_1}\right) \boldsymbol{r}\,.$$

Die Indizes 1 und 2 beziehen sich dabei auf die beiden Teilchen, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ ist der Radiusvektor zwischen ihnen und $\mu = m_1\, m_2/(m_1 + m_2)$ die reduzierte Masse. Die Bewegungsgleichung der Teilchen lautet

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \mu\, \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e_1\, e_2\, \boldsymbol{r}}{r^3}$$

$e_1\, e_2 > 0$). Nach (82,13) ist die Gesamtenergie der Bremsstrahlung

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{2\,\mu^2}{3\, c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \dot{v}^2\, \mathrm{d}t = \frac{2}{3\, c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 (e_1\, e_2)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{r^4}\,. \tag{1}$$

Bei frontalem Stoß bestimmt man die Geschwindigkeit v der Teilchen aus

$$\frac{\mu\, v^2}{2} + \frac{e_1\, e_2}{r} = \frac{\mu\, v_\infty^2}{2}\,,$$

wo v_∞ die Geschwindigkeit im Unendlichen ist. Setzen wir im Integral für $\mathrm{d}t = \mathrm{d}r/v$ und ersetzen die Integration über $\mathrm{d}t$ durch die Integration über $\mathrm{d}r$ von ∞ bis $r_{\min} = 2\, e_1\, e_2/\mu\, v_\infty^2$ und von $r_{\min}$ bis ∞, so können wir schreiben:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{r^4} = 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{r^4 \sqrt{v_\infty^2 - \dfrac{2\, e_1\, e_2}{\mu\, r}}}\,.$$

[1] In allen Aufgaben gilt für die Geschwindigkeit der Teilchen $v \ll c$.

Durch Ausrechnen des Integrals erhalten wir:

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{8 \mu^3 v_\infty^5}{45 c^3 e_1 e_2} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 .$$

3. Man bestimme die Gesamtstrahlung beim Vorbeifliegen einer Ladung an einer anderen, wenn die Geschwindigkeit so groß (gegenüber der Lichtgeschwindigkeit jedoch noch klein) ist, daß die Abweichung von der gradlinigen Bewegung als klein angesehen werden kann.

Lösung. Der Ablenkungswinkel ist klein, wenn die kinetische Energie $\mu v^2/2$ im Vergleich zur potentiellen Energie, die die Größenordnung $e_1 e_2/\varrho$ hat, groß ist, d. h. wenn $\mu v^2 \gg e_1 e_2/\varrho$ gilt. Bei gradliniger Bewegung mit der Geschwindigkeit v ist $r = \sqrt{\varrho^2 + v^2 t^2}$, wobei ϱ den Zielabstand darstellt. Durch Einsetzen in Formel (1) der vorigen Aufgabe und Berechnen des Integrals erhalten wir

$$\Delta \mathfrak{E} = \frac{\pi (e_1 e_2)^2}{3 v c^3 \varrho^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 .$$

4. Man stelle die Formel für die Spektralverteilung der Bremsstrahlung für den Grenzfall kleiner Frequenzen[1]) auf.

Lösung. Im Integral

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\boldsymbol{d}}(t)\, e^{i \omega t}\, dt = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\boldsymbol{v}}\, e^{i \omega t}\, dt$$

ist die Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}}$ nur im Verlauf einer Zeitdauer $\sim \tau$ merklich von Null verschieden. Deshalb kann man annehmen, daß bei Frequenzen $\omega \ll 1/\tau$ im Integranden $\omega t \ll 1$ und dementsprechend $e^{i \omega t} \approx 1$ ist. Dann erhält man

$$\ddot{\boldsymbol{d}}_\omega = \mu \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\boldsymbol{v}}\, dt = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \Delta \boldsymbol{p} ,$$

wobei $\Delta \boldsymbol{p}$ die beim Stoß erfolgte Änderung des Impulses $\boldsymbol{p} = \mu \boldsymbol{v}$ darstellt. Nach (82,14) ist die in dem Frequenzbereich $d\omega$ ausgestrahlte Energie

$$d\mathfrak{E}_\omega = \frac{2}{3 \pi c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right)^2 (\Delta \boldsymbol{p})^2\, d\omega .$$

Man beachte, daß diese Verteilung frequenzunabhängig ist, d. h., $d\mathfrak{E}_\omega / d\omega$ strebt für $\omega \to 0$ einem konstanten Grenzwert zu.

5. Man bestimme die Strahlungsintensität einer Ladung, die sich auf einer Kreisbahn in einem konstanten homogenen Magnetfeld bewegt.

Lösung. Nach Formel (82,9) finden wir:

$$I = \frac{2 e^4 H^2 v^2}{3 m^2 c^5} .$$

§ 83. Die Strahlung einer schnell bewegten Ladung

Wir betrachten hier ein geladenes Teilchen, das sich in einem äußeren Feld mit einer Geschwindigkeit bewegt, die im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit nicht klein ist. Zur Lösung dieser Aufgabe ist es günstig, den Lienard-Wiechert-

[1]) Bei der Spektralverteilung der Bremsstrahlung entfällt der Hauptanteil der Intensität auf Frequenzen $\omega \sim 1/\tau$, wobei τ von der Größenordnung der Stoßdauer ist. Dementsprechend verstehen wir hier unter kleinen Frequenzen solche, für die $\omega \ll 1/\tau$ gilt.

schen Ausdruck (80,8), (80,9) für das Feld zu benutzen. In großen Entfernungen brauchen wir nur den Term mit der niedrigsten Potenz von $1/R$ beizubehalten (d. h. den zweiten Term in der Gleichung (80,8)). Führen wir den Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ in der Strahlungsrichtung ein ($\boldsymbol{R} = \boldsymbol{n}\, R$), so erhalten wir die Formel

$$\boldsymbol{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\left[\boldsymbol{n}\left[\left(\boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\boldsymbol{w}\right]\right]}{\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{v}}{c}\right)^3}, \qquad \boldsymbol{H} = [\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{E}]\,, \tag{83,1}$$

worin alle Größen auf der rechten Seite zum retardierten Zeitpunkt $t' = t - R/c$ zu nehmen sind.

Die Intensität der Ausstrahlung in den Raumwinkel do ist proportional zu E^2. Die sich hieraus ergebende Winkelverteilung ist im allgemeinen ziemlich kompliziert. Im ultrarelativistischen Falle (v nahe bei c; $1 - v/c \ll 1$) besitzt sie eine charakteristische Eigentümlichkeit, die mit dem Vorhandensein hoher Potenzen der Differenz $1 - \boldsymbol{v}\,\boldsymbol{n}/c$ in den Nennern der verschiedenen Terme dieses Ausdrucks zusammenhängt. Die Intensität ist nämlich in dem kleinen Winkelintervall groß, in dem diese Differenz klein ist. Bezeichnen wir mit θ den kleinen Winkel zwischen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{n}$, so ist

$$1 - \frac{v}{c}\cos\theta \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} \approx \frac{1}{2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2\right). \tag{83,2}$$

Diese Differenz ist klein bei

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,. \tag{83,3}$$

Das ultrarelativistische Teilchen strahlt also in seine Bewegungsrichtung, und zwar in das Winkelintervall (83,3) um die Geschwindigkeitsrichtung.

Die im Laufe der Zeit dt in das Raumwinkelelement do ausgestrahlte Energiemenge ist gleich

$$\left(\frac{c}{4\pi} E^2\, R^2\, \mathrm{d}o\right) \mathrm{d}t\,. \tag{83,4}$$

Bei der Berechnung der Strahlungsintensität muß man hier jedoch zwei mögliche Verfahren zu ihrer Bestimmung unterscheiden.

In (83,4) ist dt das Zeitinterval im Moment der Beobachtung, so daß der Klammerausdruck die Intensität darstellt, die ein Beobachter in der Zeiteinheit wahrnimmt. Infolge des Verzögerungseffektes, der bei der Ausbreitung von Wellen vom strahlenden Teilchen zum Beobachtungspunkt auftritt, fällt das Intervall dt nicht mit dem Zeitintervall dt' zusammen, in dessen Verlauf die Energie (83,4) von dem sich bewegenden Teilchen ausgestrahlt wurde. Entsprechend (80,7) haben wir

$$\mathrm{d}t = \frac{\partial t}{\partial t'}\,\mathrm{d}t' = \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{v}}{c}\right)\mathrm{d}t'\,. \tag{83,5}$$

Definiert man die Intensität als die pro Zeiteinheit ausgestrahlte Energie, so erhält man folgende Gleichung:

$$dI = \frac{c}{4\pi} E^2 \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}}{c}\right) R^2 \, do \,. \tag{83,6}$$

Für $\boldsymbol{v} \ll c$ (wie es im § 82 vorausgesetzt wurde) kann der Faktor $1 - \boldsymbol{n}\boldsymbol{v}/c$ durch 1 ersetzt werden, so daß beide Formulierungen für die Intensität übereinstimmen.

Aufgabe

Man bestimme die Strahlungsintensität ultrarelativistischer Teilchen, die sich auf einer Kreisbahn in einem konstanten homogenen Magnetfeld bewegen.

Lösung. Bei zueinander senkrechter Beschleunigung und Geschwindigkeit liefert die Berechnung nach den Formeln (83,1) und (83,6):

$$dI = \frac{e^2 w^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^5} \right\} do\,,$$

wo θ der Winkel zwischen $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{v}$ ist und φ der azimutale Winkel, den der Vektor $\boldsymbol{n}$ mit der durch $\boldsymbol{v}$ und w aufgespannten Ebene bildet. Im ultrarelativistischen Falle kommt dem Bereich kleiner θ-Werte die Hauptrolle zu. In diesem Bereich ist

$$dI = \frac{2 e^2 w^2}{\pi c^3} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2\right)^3} - \frac{4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\theta^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2\right)^5} \cos^2\varphi \right\} do\,,$$

und das Raumwinkelelement $do = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \approx \theta \, d\theta \, d\varphi$. Wegen der schnellen Konvergenz des Integrals über $d\theta$ kann man die Integration über $d\theta$ bei der Berechnung der Gesamtintensität von 0 bis ∞ ausdehnen. Als Ergebnis erhalten wir:

$$I = \frac{2 e^4 H^2}{3 m^2 c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\,.$$

Hier ist auch schon der Ausdruck für die Beschleunigung bei der Kreisbewegung im Magnetfeld H eingesetzt:

$$w = \frac{e v H}{m c}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{e H}{m}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,.$$

§ 84. Strahlungsdämpfung

Die Ausstrahlung elektromagnetischer Wellen durch bewegte Ladungen führt zum Verlust an Energie. Die Rückwirkung dieses Verlustes auf die Bewegung der Ladungen kann durch Einführung entsprechender „Dämpfungskräfte" $\boldsymbol{f}$ in die Bewegungsgleichungen beschrieben werden.

Wir betrachten ein System von Ladungen, das eine stationäre Bewegung mit nichtrelativistischen Geschwindigkeiten ($v \ll c$) ausführt. Der mittlere Energieverlust des Systems (bezogen auf die Zeiteinheit) ist gleich der mittleren Intensität der Ausstrahlung (82,10). Wir wählen die Kräfte $\boldsymbol{f}$ derart, daß dieser Energieverlust als mittlere Arbeit dieser Kräfte dargestellt werden kann. In der Zeiteinheit leisten diese Kräfte $\boldsymbol{f}$ die Arbeit $\boldsymbol{f}\,\boldsymbol{v}$, wobei $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit der Teilchen ist. Somit kann man

$$\sum_a \overline{\boldsymbol{f}_a \boldsymbol{v}_a} = -\frac{2}{3\,c^3}\overline{\ddot{\boldsymbol{d}}^2} \tag{84,1}$$

schreiben (dabei wird über alle Teilchen des Systems summiert).

Es ist leicht zu sehen, daß die Kräfte

$$\boldsymbol{f}_a = \frac{2\,e_a}{3\,c^3}\dddot{\boldsymbol{d}} \tag{84,2}$$

dieser Forderung genügen. Tatsächlich erhalten wir

$$\sum_a \boldsymbol{f}_a \boldsymbol{v}_a = \frac{2}{3\,c^3}\dddot{\boldsymbol{d}} \sum_a e_a \boldsymbol{v}_a = \frac{2}{3\,c^3}\dddot{\boldsymbol{d}}\,\dot{\boldsymbol{d}} = \frac{2}{3\,c^3}\frac{d}{dt}(\ddot{\boldsymbol{d}}\,\dot{\boldsymbol{d}}) - \frac{2}{3}\ddot{\boldsymbol{d}}^2 .$$

Der erste Term, der die vollständige Ableitung nach der Zeit enthält, verschwindet bei der Mittelung (vgl. die Anmerkung auf Seite 184) und wir erhalten wieder (84,1). Die Kräfte (84,2) bezeichnet man als *Strahlungsdämpfung* oder LORENTZ*sche Dämpfungskraft*.

Eine Strahlungsdämpfung tritt auch auf, wenn sich nur ein Teilchen in einem äußeren Feld bewegt. In diesem Falle ist $\dddot{\boldsymbol{d}} = e\ddot{\boldsymbol{v}}$ und die Bewegungsgleichung erhält unter Berücksichtigung der Kräfte (84,2) die Gestalt

$$m\,\dot{\boldsymbol{v}} = e\,\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}] + \frac{2\,e^2}{3\,c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} . \tag{84,3}$$

Man muß jedoch im Auge behalten, daß diese Beschreibung einer „Wirkung der Ladung auf sich selbst“ mittels der Dämpfungskräfte nicht ganz befriedigend ist und Widersprüche in sich enthält. Tatsächlich führt die Gleichung (84,3) beim Fehlen eines äußeren Feldes zu

$$m\,\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{2\,e^2}{3\,c^3}\ddot{\boldsymbol{v}} .$$

Sie besitzt außer der trivialen Lösung $\boldsymbol{v}$ = const noch eine Lösung, bei der die Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}}$ proportional zu $\exp\,(3\,m\,c^3\,t/2\,e^2)$ ist, d. h. mit der Zeit unbeschränkt wächst. Dies bedeutet etwa, daß eine Ladung, die sich durch irgendein Feld bewegt, beim Austritt aus dem Feld sich unbeschränkt selbst beschleunigen würde. Die Unsinnigkeit dieses Ergebnisses zeigt, daß die Gleichungen (84,3) nur begrenzt anwendbar sind.

Es kann hier die Frage entstehen, wie die Elektrodynamik, in der doch der Energieerhaltungssatz gilt, zu einem derartig absurden Ergebnis führen kann, nach dem ein freies Teilchen seine Energie unbeschränkt vergrößert. Die

Lösung dieser Schwierigkeit liegt in Wirklichkeit in der schon früher erwähnten (§ 68) unendlich großen elektromagnetischen „Eigenmasse" der Elementarteilchen. Wenn wir in den Bewegungsgleichungen für die Masse der Ladung einen endlichen Wert benutzen, so schreiben wir ihr damit im wesentlichen formal eine unendlich große negative „Eigenmasse" nicht elektromagnetischen Ursprungs zu, die zusammen mit der elektromagnetischen Masse die endliche Masse des Teilchens ergibt. Die Subtraktion von zwei unendlichen Größen ist jedoch keine mathematisch korrekte Operation; dieses Verfahren führt zu einer Reihe Schwierigkeiten, u. a. zu den hier erwähnten.

Da die Dämpfungskraft nach den angestellten Überlegungen zu widersprüchlichen Ergebnissen führt, ist die Gleichung (84,2) nur dann anwendbar, wenn diese Kraft klein gegenüber der Kraft ist, die auf die Ladung von Seiten des äußeren Feldes wirkt.

§ 85. Streuung an freien Ladungen

Fällt in ein System von Ladungen eine elektromagnetische Welle ein, so geraten die Ladungen unter ihrem Einfluß in Bewegung. Diese Bewegung ist ihrerseits wieder von einer Ausstrahlung nach allen Richtungen begleitet: Es tritt eine sogenannte *Streuung* der ursprünglichen Welle auf.

Die Streuung läßt sich zweckmäßig durch das Verhältnis der vom streuenden System in eine bestimmte Richtung in der Zeiteinheit ausgesandten Energiemenge zur Dichte des auf das System fallenden Energiestromes charakterisieren. Dieses Verhältnis besitzt offensichtlich die Dimensionen einer Fläche und wird *effektiver Streuquerschnitt* genannt (vgl. § 15).

Es sei $\mathrm{d}I$ die vom System in den Raumwinkel $\mathrm{d}o$ (in einer Sekunde) ausgestrahlte Energie, wobei auf das System eine Welle mit dem Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$ fällt. Der effektive Streuquerschnitt (in den Raumwinkel $\mathrm{d}o$) ist dann

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\overline{S}} \tag{85,1}$$

die Querstriche über den Buchstaben kennzeichnen die zeitliche Mittelung). Das Integral σ von $\mathrm{d}\sigma$ über alle Richtungen ist der totale effektive Streuquerschnitt.

Wir betrachten die Streuung, die eine unbewegte freie Ladung hervorruft. Auf diese Ladung möge eine linear polarisierte ebene monochromatische Welle fallen. Das elektrische Feld der Welle läßt sich in der Form

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r} + \alpha)$$

schreiben.

Wir werden voraussetzen, daß die Geschwindigkeit, die die Ladung durch das einfallende Wellenfeld erhält, klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist. Praktisch wird dies immer erfüllt sein. Als auf die Ladung wirkende Kraft können wir dann $e\boldsymbol{E}$ ansetzen, während die vom Magnetfeld herrührende Kraft

$\frac{e}{c}[\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{H}]$ vernachlässigbar ist. Auch den Einfluß der Verschiebung der Ladung bei ihren Schwingungen unter der Wirkung des Feldes kann man hier vernachlässigen. Vollführt die Ladung Schwingungen um den Koordinatenursprungspunkt, so kann man annehmen, daß auf sie zu jeder Zeit das im Koordinatenursprung befindliche Feld einwirkt, d. h.

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t + \alpha) .$$

Da die Bewegungsgleichungen einer Ladung

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}$$

lauten und ihr Dipolmoment $\boldsymbol{d} = e\,\boldsymbol{r}$ ist, folgt

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = \frac{e^2}{m}\boldsymbol{E} . \tag{85,2}$$

Zur Berechnung der gestreuten Strahlung benutzen wir die Gleichung (82,7) für die Dipolstrahlung; dies ist erlaubt, da die von der Ladung erreichte Geschwindigkeit als klein angenommen wurde. Wir stellen ferner fest, daß die Frequenz der von der Ladung ausgestrahlten (d. h. von ihr gestreuten) Welle offensichtlich gleich der Frequenz der einfallenden Welle ist.

Wenn wir (85,2) in (82,7) einsetzen, finden wir

$$\mathrm{d}I = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}[\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{n}]^2\,\mathrm{d}o . \tag{85,3}$$

Andererseits ist der POYNTING-Vektor der einfallenden Welle

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2 .$$

Damit erhalten wir für den effektiven Streuquerschnitt in den Raumwinkel do:

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{m c^2}\right)^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}o , \tag{85,4}$$

wo θ der Winkel zwischen der „Streurichtung" (Vektor $\boldsymbol{n}$) und der Richtung des elektrischen Feldes $\boldsymbol{E}$ der einfallenden Welle ist. Wir sehen, daß der effektive Streuquerschnitt für eine freie Ladung nicht von der Frequenz abhängt.

Wir wollen den totalen effektiven Streuquerschnitt σ bestimmen. Dazu legen wir die Polarachse in die Richtung von $\boldsymbol{E}$. Es ist dann d$o = \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, und wenn wir über θ von 0 bis π und über φ bis 2π integrieren, finden wir die sogenannte THOMSON*sche Formel*

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m c^2}\right)^2 . \tag{85,5}$$

Aufgaben

1. Man bestimme den effektiven Streuquerschnitt dσ für die Streuung nichtpolarisierter Wellen (natürliches Licht).

Lösung. Wir müssen (85,4) über alle Richtungen des Vektors $\boldsymbol{E}$ in der Ebene mitteln, die zur Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle (Richtung des Wellenvektors $\boldsymbol{k}$) senkrecht ist. Wir wählen ein Koordinatensystem mit der z-Achse in Richtung von $\boldsymbol{k}$ und der x-Achse in Richtung von $\boldsymbol{E}$. Dann ist der Kosinus des Winkels θ zwischen den Richtungen $\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{E}$, d. h. die Projektion des Einheitsvektors $\boldsymbol{n}$ auf die x-Achse, gleich $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\varphi$, wo ϑ und φ Polar- und Azimutwinkel bezüglich der der Richtung $\boldsymbol{n}$ sind. Die Mittelung über alle Richtungen $\boldsymbol{E}$ in der zu $\boldsymbol{K}$ senkrechten Ebene ist dann einer Mittelung über φ äquivalent. Wir erhalten

$$\overline{\sin^2\theta} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta)$$

und durch Einsetzen in (85,4)

$$d\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{m\,c^2}\right)^2 (1 + \cos^2\vartheta)\, do\,.$$

2. Man bestimme die Frequenz ω' des an einer bewegten Ladung gestreuten Lichtes.

Lösung. In dem Koordinatensystem, in dem das Teilchen ruht (Ruhsystem des Teilchens), ändert sich die Frequenz des Lichtes bei der Streuung nicht ($\omega = \omega'$). In invarianter Form läßt sich dies

$$k'_\mu\, u^\mu = k_\mu\, u^\mu$$

schreiben, wobei k^μ und k'^μ die Viererwellenvektoren des einfallenden und gestreuten Lichtes und u^μ die Vierergeschwindigkeit des Teilchens sind (im Ruhsystem ist nur die Komponente $u^0 = 1$ von Null verschieden). Gehen wir jetzt zu einem willkürlich gewählten Bezugssystem über (in dem sich das Teilchen mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt), so können wir diese Gleichung in der Form

$$\omega'\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right) = \omega\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)$$

schreiben, wo θ und θ' die Winkel sind, die die einfallende und die gestreute Welle mit der Richtung von $\boldsymbol{v}$ bilden.

3. Man bestimme den effektiven Streuquerschnitt für die Streuung einer linear polarisierten Welle an einer Ladung, die unter dem Einfluß irgendeiner elastischen Kraft kleine Schwingungen mit der Frequenz ω_0 ausführt (räumlicher Oszillator). Dabei ist die Strahlungsdämpfung zu berücksichtigen.

Lösung. Die Bewegungsgleichung der im Felde der einfallenden Welle befindlichen Ladung ist

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\,\boldsymbol{r} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0\, e^{-i\omega t} + \frac{2\,e^2}{3\,m\,c^3}\,\dddot{\boldsymbol{r}}\,.$$

In der Dämpfungskraft (zweiter Term rechts) setzen wir näherungsweise $\dddot{\boldsymbol{r}} = -\,\omega_0^2\,\dot{\boldsymbol{r}}$; dann erhalten wir

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \gamma\,\dot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\,\boldsymbol{r} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0\, \mathrm{e}^{-i\omega t}\,, \qquad \gamma = \frac{2\,e^2}{3\,m\,c^3}\,\omega_0^2\,.$$

Für die erzwungene Schwingung folgt daraus

$$\boldsymbol{r} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0\,\frac{\mathrm{e}^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\,\omega\,\gamma}\,.$$

Die weitere Berechnung erfolgt so, wie es im Text des Paragraphen angegeben ist (bei der Berechnung der Mittelwerte der Quadrate komplexer Größen ist das in der Anmerkung auf

Seite 196 Gesagte zu berücksichtigen). Als Ergebnis für den effektiven Streuquerschnitt erhalten wir

$$\sigma = \frac{8\,\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m\,c^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^{\,2} + \omega^2\,\gamma^2}.$$

§ 86. Streuung an einem System von Ladungen

Die Streuung elektromagnetischer Wellen an einem System von Ladungen unterscheidet sich von der Streuung an einer (unbewegten) Ladung vor allem dadurch, daß infolge der vorhandenen Eigenbewegungen der Ladungen des Systems die Frequenz der gestreuten Strahlung von der der einfallenden Wellen verschieden sein kann. In die spektrale Entwicklung der gestreuten Strahlung gehen nämlich neben der Frequenz ω der einfallenden Welle auch die Frequenzen ω' ein, die sich von ω um eine beliebige Eigenfrequenz der Bewegung des streuenden Systems unterscheiden. Eine Streuung mit Frequenzänderung wird als *inkohärent* bezeichnet im Unterschied zur *kohärenten* Streuung ohne Frequenzänderung.

Setzen wir das Feld der einfallenden Welle als schwach voraus, so können wir die Stromdichte in der Gestalt $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_0 + \boldsymbol{j}'$ darstellen, wo $\boldsymbol{j}_0$ die Stromdichte beim Fehlen des äußeren Feldes ist und $\boldsymbol{j}'$ die Stromänderung unter dem Einfluß der einfallenden Welle. Entsprechend hat auch das Vektorpotential des Systems die Form $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}'$, wobei $\boldsymbol{A}_0$ und $\boldsymbol{A}'$ durch die Ströme $\boldsymbol{j}_0$ und $\boldsymbol{j}'$ bestimmt werden. Das Potential $\boldsymbol{A}'$ beschreibt die am System gestreute Welle und wird durch den Strom $\boldsymbol{j}'$ nach der Formel (81,2) bestimmt:

$$\boldsymbol{A}' = \frac{1}{c\,R_0}\int \boldsymbol{j}'_{t-\frac{R_0}{c}+\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}}{c}}\,\mathrm{d}V\,. \qquad (86,1)$$

Wir betrachten die beiden Grenzfälle, wo die Frequenz ω der gestreuten Wellen entweder niedrig oder hoch ist, im Vergleich zu den Haupteigenfrequenzen des Systems. Letztere sind von der Größenordnung $\omega_0 \sim v/a$, wobei v die Geschwindigkeit der Ladungen im System und a dessen Abmessungen bedeuten. Ferner werden wir voraussetzen, daß die Geschwindigkeit $v \ll c$ sei.

Wir beginnen mit dem Fall

$$\omega \ll \omega_0 \sim \frac{v}{a}. \qquad (86,2)$$

Das gestreute Feld kann sowohl aus kohärenten als auch aus inkohärenten Anteilen bestehen, wir werden hier aber nur die kohärente Streuung untersuchen.

Bei der Bedingung (86,2) können in der Formel (86,1) die im § 82 gemachten Vernachlässigungen vorgenommen werden. Mit anderen Worten, die gestreute Strahlung wird eine Dipolstrahlung sein. Wenn das so ist, wird die Intensität ihrer spektralen Komponente mit der Frequenz ω dem Quadrat der Fourier-Komponente $|\ddot{\boldsymbol{d}}'_\omega|^2 = \omega^4\,|\boldsymbol{d}'_\omega|^2$ proportional sein, wobei $\boldsymbol{d}'$ die Änderung des Dipolmomentes unter der Einwirkung der einfallenden Wellen ist.

Verschwindet die Gesamtladung des Systems (neutrales Atom oder Molekül), so strebt $\boldsymbol{d}'_\omega$ für $\omega \to 0$ gegen einen konstanten Grenzwert (wäre die Ladungssumme von Null verschieden, so würde sich bei $\omega = 0$, d. h. im konstanten Feld, das System als Ganzes in Bewegung setzen). Bei kleinem ω kann man daher $\boldsymbol{d}_\omega$ als frequenzunabhängig ansehen. Dann ist die Intensität der gestreuten Welle und mit ihr auch der effektive Streuquerschnitt zu ω^4 proportional:

$$\sigma_{\text{koh}} = \text{const} \cdot \omega^4 . \tag{86,3}$$

Betrachten wir nun den umgekehrten Fall hoher Frequenzen:

$$\omega \gg \omega_0 \sim \frac{v}{a} . \tag{86,4}$$

Auf Grund dieser Bedingung ist die Bewegungsperiode der Ladungen im System groß gegenüber der Periode der Wellen. Im Verlauf eines Zeitintervalles von der Größenordnung einer Wellenperiode kann man daher die Bewegung der Ladungen als gleichförmig ansehen. Dies bedeutet, daß man bei Betrachtung der Streuung kurzer Wellen die gegenseitige Wechselwirkung der Ladungen nicht zu betrachten braucht, d. h. sie als frei ansehen kann.

Bei Berechnung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}'$, die eine Ladung im Feld der einfallenden Welle erlangt, können wir daher jede Ladung des Systems getrennt betrachten und ihre Bewegungsgleichung in der Form

$$m \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{E} = e\boldsymbol{E}_0\, \mathrm{e}^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})}$$

schreiben, wo $\boldsymbol{k} = \omega \boldsymbol{n}/c$ der Wellenvektor der einfallenden Welle ist. Der Radiusvektor einer Ladung ist natürlich eine Funktion der Zeit. Im Exponenten des Exponentialfaktors auf der rechten Seite dieser Gleichung ist die zeitliche Änderung des ersten Terms groß im Vergleich zu der zeitlichen Änderung des zweiten (die erste ist gleich ω, die zweite von der Ordnung $k v \sim v\,\omega/c \ll \omega$). Bei der Integration der Bewegungsgleichung kann man daher auf ihrer rechten Seite $\boldsymbol{r}$ als konstant annehmen. Dann ist

$$\boldsymbol{v}' = -\frac{e}{i\omega m}\boldsymbol{E}_0\, \mathrm{e}^{-i(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r})} . \tag{86,5}$$

Für das Vektorpotential der gestreuten Welle haben wir (in großen Entfernungen vom System), wenn wir in (86,1) vom Integral zur Summe über die Ladungen übergehen

$$\boldsymbol{A}' = \frac{1}{c R_0} \Sigma\, (e\,\boldsymbol{v}')_{t - \frac{R_0}{c} + \frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}'}{c}} ,$$

wobei $\boldsymbol{n}'$ der Einheitsvektor in der Streurichtung ist. Setzen wir hier (86,5) ein, so finden wir:

$$\boldsymbol{A}' = -\frac{1}{i c R_0 \omega}\, \mathrm{e}^{-i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)} \boldsymbol{E}_0\, \Sigma \frac{e^2}{m} \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}} ; \tag{86,6}$$

$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$ ist hier die Differenz der Wellenvektoren der gestreuten Welle $\boldsymbol{k}' = \omega\, \boldsymbol{n}'/c$ und der einfallenden Welle $\boldsymbol{k} = \omega\, \boldsymbol{n}/c$.[1]) Die Summe in (86,6) ist jetzt zum Zeitpunkt $t' = t - R_0/c$ zu nehmen, da die Änderung von $\boldsymbol{r}$ in der Zeit $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n}'/c$ infolge der angenommenen Kleinheit der Teilchengeschwindigkeiten vernachlässigt werden kann (den Index t' lassen wir wie üblich kürzehalber fort). Der Absolutwert des Vektors $\boldsymbol{q}$ ist

$$q = 2\,\frac{\omega}{c}\sin\frac{\vartheta}{2}\,, \tag{86,7}$$

wo ϑ der Streuwinkel ist.

Bei der Streuung an einem Atom (oder Molekül) kann man in der Summe in (86,6) die Terme, die dem Kern entsprechen, wegen der Größe seiner Masse gegenüber der Elektronenmasse vernachlässigen. Unten werden wir gerade diesen Fall im Auge haben, so daß wir den Faktor e^2/m aus dem Summenzeichen herausziehen können und unter e und m nun Ladung und Masse des Elektrons zu verstehen haben.

Für das Feld $\boldsymbol{H}'$ der gestreuten Welle finden wir nach (81,3)

$$\boldsymbol{H}' = \frac{[\boldsymbol{E}_0\,\boldsymbol{n}']}{c^2 R_0}\,\mathrm{e}^{-i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)}\,\frac{e^2}{m}\sum \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\,. \tag{86,8}$$

Der Energiestrom in das Raumwinkelelement in Richtung $\boldsymbol{n}'$ ist

$$\frac{c\,|\boldsymbol{H}'|^2}{8\pi}\,R_0^2\,do = \frac{e^4}{8\pi c^3 m^2}\,[\boldsymbol{E}_0\,\boldsymbol{n}']^2\,|\sum \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}|^2\,do\,.$$

Teilen wir diesen Ausdruck durch den mittleren Energiestrom $c\,|\boldsymbol{E}_0|^2/8\pi$ der einfallenden Welle (vgl. die Anmerkung auf Seite 196) und führen wir den Winkel θ zwischen der Feldrichtung $\boldsymbol{E}$ der einfallenden Welle und der Stromrichtung ein, so finden wir endgültig den effektiven Streuquerschnitt in der Form

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{m c^2}\right)^2\,\overline{|\sum \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}|^2}\,\sin^2\theta\,do\,. \tag{86,9}$$

Der Querstrich bezeichnet die Mittelung über die Zeit, d. h. die Mittelung über die Bewegung der Ladungen im System; die Mittelung erfolgte in Hinblick darauf, daß die Streuung in einem Zeitintervall beobachtet wird, das groß gegenüber der Bewegungsperiode der Ladungen im System ist.

Für die Wellenlänge der einfallenden Strahlung folgt aus (86,4) die Ungleichung $\lambda \ll a\,c/v$. Je nach der relativen Größe von λ und a sind die beiden Grenzfälle $\lambda \gg a$ und $\lambda \ll a$ möglich. In beiden Fällen vereinfacht sich die allgemeine Gleichung (86,9) wesentlich.

[1]) Genau genommen ist $\boldsymbol{k}' = \omega'\,\boldsymbol{n}'/c$, wo die Frequenzen ω' der gestreuten Welle von ω zu unterscheiden ist. Die Differenz $\omega' - \omega \sim \omega_0$ kann man jedoch für den betrachteten Fall hoher Frequenzen vernachlässigen.

Für $\lambda \gg a$ ist in (86,9) $\boldsymbol{q}\,\boldsymbol{r} \ll 1$, da $q \sim 1/\lambda$ und $r \sim a$ gilt. Ersetzen wir dementsprechend $e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}$ durch 1, so haben wir

$$d\sigma = Z^2 \left(\frac{e^2}{m\,c^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do\,, \tag{86,10}$$

d. h., die Streuung ist dem Quadrat der Elektronenzahl Z des Atoms proportional.

Wir gehen zum Fall $\lambda \ll a$ über. In dem Quadrat der Summe in (86,9) gibt es neben dem 1 liefernden Absolutbetrag jeden Termes Produkte der Gestalt $e^{i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)}$. Bei der Mittelung über die Bewegung der Ladungen, d. h. über ihre gegenseitigen Lagen im System, durchläuft die Differenz $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ Werte in einem Intervall der Größenordnung a. Wegen $q \sim 1/\lambda$ und $\lambda \ll a$ ist der Exponentialfaktor $\exp i\,\boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_2)$ in diesem Intervall eine rasch oszillierende Funktion, deren Mittelwert verschwindet. Im Fall $\lambda \ll a$ ist daher der effektive Streuquerschnitt gleich

$$d\sigma = Z \left(\frac{e^2}{m\,c^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do\,, \tag{86,11}$$

d. h., porportional zur ersten Potenz der Elektronenzahl Z.

Die effektiven Streuquerschnitte (86,9-11) enthalten sowohl einen kohärenten als auch einen inkohärenten Anteil. Für die Bestimmung des effektiven Streuquerschnittes bei kohärenter Streuung ist derjenige Teil der gestreuten Welle auszuwählen, der die Frequenz ω besitzt. Der Ausdruck (86,8) für das Feld hängt von der Zeit über den Faktor $e^{-i\omega t}$ ab; ferner hängt auch die Summe $\sum e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}$ von der Zeit ab. Die letztgenannte Abhängigkeit führt dazu, daß im Felde der gestreuten Welle neben der Frequenz ω noch andere (wenn auch eng benachbarte) Frequenzen enthalten sind. Wir erhalten offenbar den Teil des Feldes, der die Frequenz ω besitzt (d. h. von der Zeit nur über den Faktor $e^{-i\omega t}$ abhängt), wenn wir die Summe $\sum e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}$ über die Zeit mitteln. Der Ausdruck für den effektiven Streuquerschnitt bei kohärenter Streuung $d\sigma_{\text{koh}}$ unterscheidet sich also von dem gesamten Querschnitt $d\sigma$ dadurch, daß anstelle des Mittelwertes über das Absolutquadrat der Summe das Absolutquadrat des Mittelwertes der Summe steht:

$$d\sigma_{\text{koh}} = \left(\frac{e^2}{m\,c^2}\right)^2 |F(\boldsymbol{q})|^2 \sin^2\theta\, do \tag{86,12}$$

mit

$$F(\boldsymbol{q}) = \overline{\sum e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}}\,. \tag{86,13}$$

Die Funktion F(q) heißt *Atomformfaktor*. Wir weisen darauf hin, daß dieser Mittelwert nichts anderes ist, als die räumliche Fourier-Komponente der mittleren Ladungsverteilung $\bar{\varrho}(\boldsymbol{r})$ im Atom:

$$e\,F(\boldsymbol{q}) = \int \bar{\varrho}(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\, dV\,. \tag{86,14}$$

Das ist leicht einzusehen, wenn man zuerst die nichtgemittelte Dichte $\varrho(\boldsymbol{r})$ als Summe über δ-Funktion (vgl. (54,1)) schreibt.

Für $\lambda \gg a$ können wir wieder $e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}}$ durch 1 ersetzen, so daß

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{koh}} = Z^2 \left(\frac{e^2}{m c^2}\right)^2 \sin^2\theta \, \mathrm{d}o \tag{86,15}$$

folgt. Vergleichen wir dies mit dem gesamten effektiven Querschnitt (86,10), so sehen wir, daß $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{koh}} = \mathrm{d}\sigma$, die gesamte Streuung also kohärent ist.

Gilt dagegen $\lambda \ll a$, so verschwinden bei der Mittelung in (86,13) alle Summenglieder (als Mittelwerte von rasch oszillierenden Zeitfunktionen), und es ist $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{koh}} = 0$. In diesem Fall ist somit die Streuung vollständig inkohärent.

Sachverzeichnis